Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

62e jaargang
1986 | 1987,
augustus | september

Euclides 1

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52c, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Bij het begin van de 62e jaargang

Het aantal nummers van Euclides is teruggebracht van 10 naar 9 per jaargang.

Het bestuur van onze vereniging, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, heeft deze beslissing onlangs genomen. En wel met ingang van de 62e jaargang; vanaf nu dus. Na vele jaargangen van 10 nummers.

De belangrijkste reden om deze beslissing te nemen is van financiële aard. Het is het bestuur al jarenlang gelukt de contributie voor het lidmaatschap op *f* 50,– per jaar te houden. En in de komende jaarvergadering zal voorgesteld worden deze contributie slechts met *f* 5,– te verhogen. Op zich een zeer goede zaak die, naar verwacht mag worden, een positieve invloed heeft op het aantal leden en daarmee op de kracht van de NVvW en op de invloed die de vereniging uit kan oefenen. En dat is belangrijk juist in deze tijd nu er belangrijke veranderingen van inhoudelijke aard plaatsvinden in de wiskunde van het voortgezet onderwijs.

De keerzijde van dit beleid is dat er een moment komt waarop inkomsten en gewenste uitgaven niet meer met elkaar in evenwicht zijn en er maatregelen genomen moeten worden waardoor de uitgaven gesnoeid worden. Zo'n moment is nu dus aangebroken.
De redactie is om diverse redenen ongelukkig met het besluit tot vermindering van het aantal nummers.
In de eerste plaats is het aanbod van kopij zo omvangrijk dat we verwachten dat er een discrepantie zal ontstaan tussen aanbod en plaatsingsmogelijkheden. Gevolg zal zijn dat meer artikelen niet geplaatst zullen kunnen worden en dat verdraagt zich slecht met het idee dat Euclides óók een blad is waarin de leden van de vereniging hun ideeën kwijt kunnen.

Een ander gevolg van het minder frequent verschijnen is dat we minder op de actualiteit kunnen aansluiten en dat staat haaks op het streven van de redactie u goed op de hoogte te houden van nieuws uit het wereldje van de schoolwiskunde.

Kortom, we vinden het een slechte zaak dat u Euclides in het komend jaar niet 10 maar 9 keer in uw brievenbus zult vinden.

De redactie spant zich in om een optimale formule voor de nieuwe situatie te vinden. Achter de schermen wordt gewerkt aan de voorbereiding van specials en het bewerken van toonaangevende buitenlandse artikelen. We zijn bezig de rubriek 'boekbesprekingen' meer te richten op uitgaven op het gebied van de schoolwiskunde en er wordt gewerkt aan de vormgeving van het blad.

De redactie hoopt en verwacht de goede samenwerking met schrijvers, uitgever en bestuur van de vereniging in 1986-87 te kunnen voortzetten.
Onze lezers wensen we 11% meer leesplezier per nummer toe dan vorig jaar.

Namens de redactie,
Frans Dolmans, hoofdredacteur.

Nederlandse vereniging van wiskundeleraren verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1985 – 31 juli 1986

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester F. F. J. Gaillard, overige leden L. Bozuwa, dr. J. van Dormolen, C. Th. Hoogsteder, M. Kindt, F. J. Mahieu, mevr. drs. N. C. Verhoef en sinds oktober mevr. drs. J. van Vaalen.

Op 30 oktober overleed dr. Joh. H. Wansink, erelid van de vereniging.

Op zaterdag 26 oktober werd de jaarvergadering gehouden in het gebouw van de SOL te Utrecht. Deze jaarvergadering werd gecombineerd met een studiedag, die verzorgd was door de Didactiekcommissie. Het thema van die dag was 'Voorbeelden'. De aanwezigen op deze dag konden deelnemen aan één of meer van de volgende werkgroepen: Aansluiten bij de ervaringswereld; Gebruik van wiskunde bij andere vakken; Rol van instapproblemen en contexten bij het begrijpen en leren van wiskundige vaardigheden; Voorbeelden; Wagenschein; Situatiebeschrijving in wiskundeteksten; Metaforen en andere beeldspraak; Proefwerken en schoolonderzoek bij HEWET.
Tevens hield prof. dr. J. van de Craats een lezing met als onderwerp: 'Voorbeelden en tegenvoorbeelden'.

Op zaterdag 22 maart hielden de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars hun elfde gemeenschappelijke studiedag in Breda.
Op deze bijeenkomst werden de volgende voordrachten gehouden: 'Ringing the changes, een week van luiden en geluid in een 6e leerjaar van een Gentse lagere school' door An Mogensen-Van Werveke; 'Toetsperikelen' door Henk Schuring en 'Eutactische sterren' door prof. dr. Jaap Seidel.

Op 1 en 7 mei vonden examenbesprekingen plaats voor wiskunde lbo-c, mavo-c en mavo-d in 21 plaatsen, voor wiskunde havo in 5 plaatsen, voor wiskunde-I vwo in 5 plaatsen, voor wiskunde-II vwo in Utrecht en voor wiskunde-A vwo in Eindhoven, Rotterdam en Zwolle.

De samenwerking tussen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs leidde in augustus tot de verschijning van het rapport 'Longitudinale Planning van het Reken- en Wiskundeonderwijs in Nederland'.
Op 20 augustus spraken bestuursleden van beide verenigingen over dit rapport met de staatssecretarissen mevr. drs. N. J. Ginjaar-Maas en drs. G. van Leijenhorst.
In augustus verscheen het 'Voorlopig rapport van de werkgroep ter voorbereiding van het eindexamenprogramma wiskunde h.a.v.o.'
De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren organiseerde op 24, 25 en 26 september hoorzittingen naar aanleiding van het verschijnen van dit rapport te Eindhoven, Zwolle en Rotterdam. De reacties op dit rapport die het bestuur op de hoorzittingen of op andere manier bereikten zijn doorgezonden naar de Werkgroep.

In januari werd de VALO (de Veldadvisering voor de leerplanontwikkeling) – wiskunde en informatica ingesteld. Namens de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zijn lid van deze VALO S. M. Kemme en mevr. W. M. Querelle.

De 'Werkgroep Vrouwen en Wiskunde' hield dit jaar haar landelijke dag op 28 september. Op 8 en 9 maart hield de werkgroep een weekend.
In januari verscheen van de werkgroep een notitie 'Wiskunde in de onderbouw', terwijl in het voorjaar de eerste 'Nieuwsbrief' van de werkgroep verscheen.

Dit verenigingsjaar heeft een 'Werkgroep Regionaal Samenwerkingsverband Wiskunde-onderwijs' getracht te komen tot de oprichting van regionale samenwerkingsverbanden. Helaas is er weinig respons van de wiskundedocenten gekomen.

In verband met de invoering van nieuwe programma's voor wiskunde-A en ruimtemeetkunde heeft het bestuur een nieuwe 'Nomenclatuurcommissie' opgericht. Op 12 februari 1986 is deze commissie aan haar taak begonnen.

In februari heeft het bestuur besloten te participeren in de Werkgroep 'Ontwikkelingsonderzoek reken/wiskundeonderwijs' van prof. K. Koster.

In november verscheen de op verzoek van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren samengestelde bundel 'Opgaven Wiskunde B VWO'.

De nauwe samenwerking met de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars uitte zich ook dit jaar onder andere in de gemeenschappelijke bestuursvergadering in september, de gemeenschappelijke studiedag in maart en bezoeken aan elkaars bijeenkomsten.

Het bestuur vergaderde dit jaar elf maal, waaronder eenmaal met de inspecteurs J. Boersma, drs. W. Kleine en drs. B. J. Westerhof.

Mededelingen

Studieweekend Vrouwen en Wiskunde

De werkgroep Vrouwen en Wiskunde organiseert vrijdag 3 oktober vanaf 17.00 uur tot zaterdag 4 oktober 17.00 uur een half-weekend ter voorbereiding van haar lustrum in maart 1987. Een paar maanden geleden zijn we gestart met het ontwikkelen van lespakketjes, die we 3 en 4 oktober willen uitproberen en bijschaven. Alle aanvullingen en nieuwe inbreng is welkom.
Het half-weekend wordt gehouden in jeugdherberg 'De Heidebloem', Bosstraat 16, Soest. Aan dit weekend zijn voor de deelnemers geen kosten verbonden. Om organisatorische redenen is aanmelding vooraf gewenst. Voor verdere inlichtingen en opgave: Els Kalkman, Klieverink 529, 1104 KC Amsterdam, tel.: 020-90 19 78 of Topy van Noorden, tel.: 078-14 89 60.
Nog nooit geweest? Dan extra welkom!

Auteurs gezocht

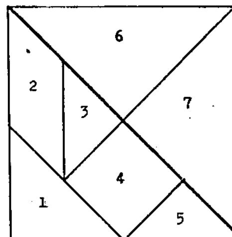
Een groep wiskundeleraren en lerarenopleiders is reeds enige jaren bezig met het ontwikkelen van geavanceerde wiskundeschoolboeken voor lbo-vwo.
De schoolwiskunde, die door de huidige en de te verwachten examens vereist wordt, wordt door hen waar mogelijk uit niet-wiskundige situaties afgeleid en op een inzichtelijke manier gepresenteerd en toegepast.
Nadrukken liggen op aspecten zoals probleemgerichtheid, echtheid, zinvolheid en bruikbaarheid.
De groep zoekt enkele enthousiaste nieuwe medewerkers die als auteur mee willen doen. Enige jaren ervaring met schoolwiskunde (bijv. als leraar) is vereist; schrijfervaring is gewenst.
Inlichtingen worden graag gegeven door Toine v.d. Bogaart, Geleenstraat 17, 1324 MP Almere-Stad. Tel.: 03240-3 80 52.

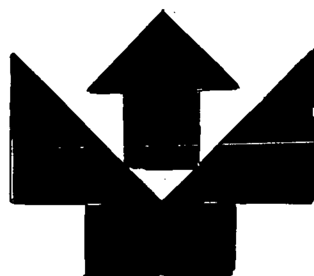
Rectificatie

Aan de eerste ronde van de Vlaamse Wiskunde Olympiade 1986 hebben niet 2093 leerlingen deelgenomen, maar 2991. Hiervan werden er 653 uitgenodigd aan de tweede ronde deel te nemen. 613 maakten van deze uitnodiging gebruik.

Een praktische meetkundeles voor de brugklas

H. J. Spalburg





Nadat onder een vorige les het begrip 'symmetrieas van een figuur' was behandeld, kwam ik op het idee de leerlingen zelf symmetrische figuren te laten maken, met behulp van de 7 delen van het tangramspel.
Hierbij ging ik als volgt te werk:
Op een moederblad formaat A4 tekende ik vlak naast- en onder elkaar 12 vierkanten van 6 bij 6 cm telkens verdeeld in 7 delen. Hiervan werden op dun gekleurd karton (verschillende kleuren) reproduk-ties gemaakt.
Daags van te voren de volgende mededeling:
'Jongelui: voor morgen géén huiswerk.' Gejuich!!!
'Pak je agenda en schrijf op: Voor morgen schaar en tube lijm meenemen en natuurlijk een fris hoofd. Vanavond dus op tijd naar bed.'
'Mijnheer wat gaan we morgen dan doen'?
Komt tijd, komt raad.
Dit antwoord is gegeven om 'spieken' in de bestaande tangramboeken te voorkomen.
'Voor wie schaar en lijm vergeet, heb ik vervangend zinvol wiskundewerk.'
Wat voor werk? 'Dat merk je morgen wel.
De volgende dag:
'Mijnheer we hebben niets vergeten, kijkt u maar.
Sommige leerlingen laten bij de deur al schaar en lijm zien. Natuurlijk zijn de verwachtingen hoog gespannen. Als ze op hun plaats zitten krijgt elke leerling:

1 Een blanco vel papier (folio formaat).
2 Een gekleurd vel met getekende vierkanten.
3 Een stuk karton als onderlegger.

Ter inleiding:
'Mieke, wanneer noem je een lijn l symmetrieas van een figuur F?'
Deze definitie komt ter ondersteuning nogmaals op het bord te staan. En nu de opdracht:
'Telkens knip je de 7 delen van een vierkant uit en vormt met deze delen een symmetrische figuur. Als je er één hebt steek dan je vinger op. Ik kom dan kijken of hij goed is. Na contrôle plak je de gemaakte figuren op het blanco vel. Teken de symmetrieas erbij en vergeet je naam en de klas niet. Veel succes!!!'
Gemaakte fouten moeten de leerlingen zelf verbeteren. Spoedig heerst er in de klas een ontspannen en gezellige sfeer. Na 50 minuten haal ik 'de oogst' binnen. De resultaten variëren van 4 tot 8 figuren. Bij het aandachtig bekijken van het werk kom ik heel wat originele en fantasierijke figuren tegen, meestal gemaakt door leerlingen, die niet zo goed zijn in wiskunde. Zie de afbeeldingen. In de volgende les komen de resultaten op het prikbord te staan met de nodige complimenten aan de leerlingen.
Commentaar van de leerlingen:
'Wanneer krijgen we weer zo'n leuke wiskundeles?'

Over de auteur:

Hedwig Spalburg is oud-leraar Twickelcollege te Hengelo (Ov). Behaalde de akte L.O. Wiskunde in Suriname en de akten K1 en K5 in Nederland. Hij heeft 40 jaar lang les gegeven, 10 jaar l.o. en 30 jaar m.o.

Functies van twee variabelen

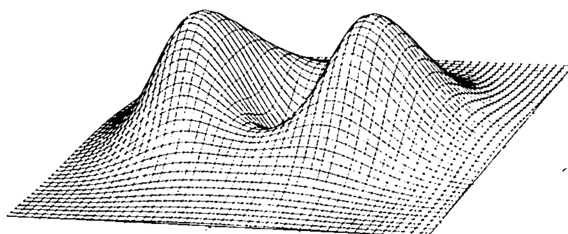
Marianne Pranger, Reyer Sjamaar

Inleiding

In dit artikel willen we u iets vertellen van onze ervaringen, opgedaan bij het werken in 5 vwo met het hoofdstuk 'Functies van twee variabelen'. Op onze school (het Christelijk Lyceum te Zeist) gebruiken we bij wiskunde in alle leerjaren Moderne Wiskunde. In de onderbouw de 4e editie van deze serie.
Tweemaal per jaar loopt een groep wiskunde studenten van de universiteit van Utrecht stage op onze school. Tijdens de eerste stageperiode van de cursus '85-'86 werd er door de studenten ook lesgegeven in 5 vwo, wiskunde A. Bij de voor- en nabesprekingen over deze lessen kwamen zoveel ideeën over achtergronden van en aanvullingen op de leerstof naar voren, dat we het plan opvatten er een artikel van te maken.
Dit artikel bestaat uit twee delen: het eerste deel gaat over een opgave uit het genoemde hoofdstuk. Deze opgave riep vragen op bij de docenten en bij de leerlingen. Dit resulteerde in overwegingen over de betekenis van de context en enkele wiskundige achtergronden. In het tweede deel van dit artikel wordt een extra vraagstuk besproken, dat ook in de klas is uitgeprobeerd. Dat vraagstuk is een aardige uitbreiding van de leerstof, en vindt zijn oorsprong in het onderwerp Morsefuncties. Het verschafte de leerlingen en docenten veel plezier.

Hoogtekaarten

Hoogtekaarten, hoogtelijnen etc. komen voor in hoofdstuk A5 van Moderne Wiskunde, bovenbouw, deel 5A. Het hoofdstuk heeft als onderwerp 'functies van twee variabelen'. We geven een korte beschrijving.
Ter inleiding van het onderwerp worden enkele bestaande hoogtekaarten getoond. Aan de hand hiervan wordt aangegeven hoe je kan herkennen, waar een berg steil of minder steil is, wat zadelpunten zijn.
Vervolgens wordt de leerling een door de computer getekend berglandschap getoond. Daarvan wordt achtereenvolgens getoond: de computerberg zelf, een hoogtekaart en een ruimtelijke voorstelling waarbij de hoogtelijnen stuk voor stuk zijn opgetild tot de juiste hoogte (zie figuur 1 t/m figuur 3).



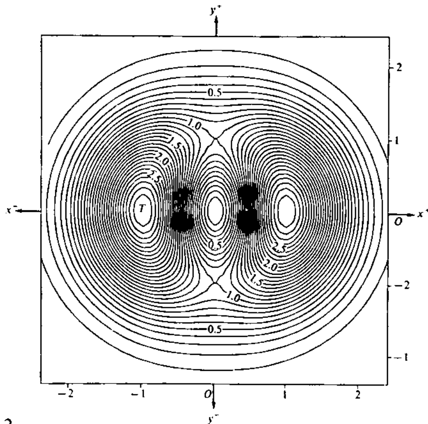
Figuur 1

Een vraagstuk

Na enkele vraagstukken waarin de leerlingen de hoogte uit de verschillende figuren moeten aflezen, volgt de opgave:
'Een knikker wordt voorzichtig op een van de toppen gelegd. Omdat die top nergens vlak is, zal de knikker gaan rollen. In welke richting verwacht je? Waarom?'

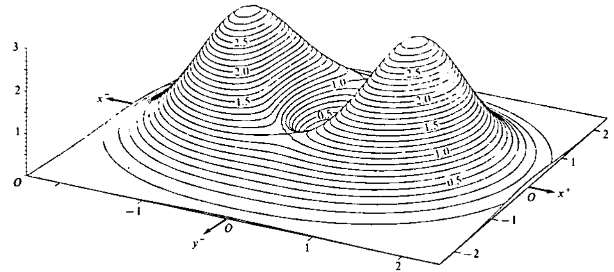
Het vraagstuk leverde in de les en in voor- en nabespreking heel wat stof voor discussie.
De meeste leerlingen redeneerden vanuit de gedachte: het balletje rolt naar beneden, langs een weg die loodrecht op de hoogtelijnen aan de steilste kant staat. Bij doorvragen naar het waarom bleek het terugkoppelen naar de context twijfel te zaaien. Want hoewel de computerberg een zeer ideale berg is die, in de werkelijkheid niet voor zal komen, zou de berg (als moeder natuur eens heel erg haar best deed) wel voor kúnnen komen.' Als eerste punt kwamen we tot de overweging, dat er op de top één

punt moet zijn waar een horizontaal raakvlak door gaat. Als het balletje muisstil precies in het punt T gelegd wordt (zie figuur 2), blijft het daar in – weliswaar labiel – evenwicht liggen. Als het balletje zijn evenwicht verliest, valt niet te voorspellen welke kant het op gaat rollen. Je kunt het laten gaan waarheen je wilt door het een tik in de gewenste richting te geven. De formulering in de opgave: 'Omdat de berg nergens vlak is, zal het balletje gaan rollen', zette de leerlingen aanvankelijk op het verkeerde been. Deze gevolgtrekking is onjuist, zoals we al eerder zeiden, ze suggereert bovendien ten onrechte dat het al of niet gaan bewegen van een balletje er mee te maken heeft of het landschap vlak is of niet.



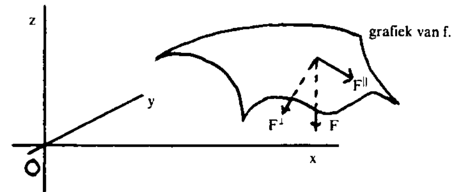
Figuur 2

De leerlingen (en leraren) die het vraagstuk op de meest argeloze manier oplosten (het balletje rolt naar beneden, loodrecht op de hoogtelijnen aan de steilste kant) zijn overigens in goed gezelschap. Verderop in het hoofdstuk wordt gevraagd de weg te tekenen in de hoogtekaart van een hellend plat vlak van een balletje dat daarop losgelaten wordt in een punt P. De oplossing die in het antwoordenboek wordt gegeven is: een halflijn vanuit P, loodrecht op de hoogtelijnen, in de richting van afnemende hoogte. Het is in het algemeen echter onwaar dat de baan van een deeltje in een heuvellandschap loodrecht op de hoogtelijnen staat (en het is misschien verstandig de leerlingen daarop opmerkzaam te maken). Bijvoorbeeld, als het balletje uit het vraagstuk op het moment van loslaten een zet krijgt in een richting die niet loodrecht op de hoogtelijnen staat, dan zal het een parabool gaan beschrijven, die op geen enkel tijdstip loodrecht op de hoogtelijnen staat. En uit ervaring weet iedereen, dat een balletje in een gekromd landschap 'uit de bocht kan vliegen', of zelfs het contact met de grond kan verliezen (stuiteren). Alleen als het een sterke wrijvingskracht ondervindt, is dit onmogelijk.



Figuur 3

Al deze overwegingen komen voort uit de gedachten die men krijgt bij het zich inleven in de concrete situatie (de wiskundige aspecten komen zo dadelijk aan de orde). Het is duidelijk dat de context in dit soort vraagstukken een belangrijke rol speelt. Juist vanuit de context kan je de leerlingen vragen stellen, die erin resulteren dat ze niet klakkeloos voor een oplossing kiezen, die of door de vraagstelling gesuggereerd wordt of gewoon de meest voor de hand liggende lijkt. Zie ook [1], hoofdstuk 6. Het bleek dat veel collega's moeilijk waren te overtuigen met redeneringen, gebaseerd op de context. Misschien dat zij wel overstag gaan door onderstaande wiskundige argumenten.
Hierbij gaan we uit van bergen die door een differentieerbare functie zijn te beschrijven. We gaan de bewegingsvergelijking van het balletje opstellen (zie ook figuur 4).



Figuur 4

Laat het landschap gegeven worden door een differentieerbare hoogtefunctie f. Op het balletje, dat zich bevindt in een punt $(x, y, f(x, y))$ van de grafiek van f en waarvan we de afmetingen verwaarlozen, werkt loodrecht naar beneden een zwaartekracht

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

die te ontbinden is in een component $F^{\perp}$ loodrecht op het oppervlak en een component $F^{\parallel}$, rakend aan het oppervlak. Hierin is m de massa van het balletje en g de versnelling van de zwaartekracht. Het gewicht van het balletje veroorzaakt een reactiekracht van het oppervlak op het balletje, die tegengesteld is aan $F^{\perp}$ (we veronderstellen dat de berg van hard materiaal is, dat niet meegeeft met het gewicht van het balletje). De nettokracht op het balletje is dus $F^{\parallel}$ en volgens Newton is de bewegingsvergelijking:

$F^{\parallel}$ = massa × versnelling

De kracht $F^{\parallel}$ rekent men uit door projectie van de vector $\vec{F}$ op het raakvlak aan de grafiek van f. De grafiek van f is het beeld van de afbeelding $g: \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_3$, gegeven door

$g(x, y) = (x, y, f(x, y))$

Deze afbeelding heeft in ieder punt (x, y) een 'beste lineaire benadering' $\mathrm{d}g(x, y)$, die wordt gegeven door de matrix van de partiële afgeleiden van g. Deze matrix is

$$\mathrm{d}g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(x, y, f(x, y))$ is op een translatie na precies het beeld van de lineaire afbeelding $\mathrm{d}g(x, y)$, anders gezegd het vlak dat wordt opgespannen door de twee kolomvectoren van $\mathrm{d}g(x, y)$.

Dus $F^{\parallel}$ is een lineaire combinatie van de kolomvectoren van $\mathrm{d}g(x, y)$. Er blijkt:

$$\vec{F} = -\frac{mg}{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

In de hoogtekaart van f zijn alleen de x- en y-componenten van de baan te zien (de z-component zie je niet). De vergelijking voor de baan s zoals gezien in de hoogtekaart, is dus (bij afwezigheid van wrijving):

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{mg}{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(s(t))\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(s(t))\right)^2} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(s(t)) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(s(t)) \end{pmatrix}$$

Hierbij is $s(t)$ een vector die afhankelijk is van de tijd. De vector $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ wordt wel de gradiënt van f genoemd en genoteerd als grad f. Deze vector staat loodrecht op de hoogtelijnen van f en wijst, als hij ongelijk aan 0 is, in de richting waarin f het snelst toeneemt. In deze notatie luidt de vergelijking:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{mg}{1 + \|\mathrm{grad} f(s(t))\|^2} \mathrm{grad} f(s(t)) = 0$$

De versnelling wijst dus in de richting van $-\mathrm{grad} f$, dat is de richting waarin de hoogte het snelst afneemt. Door deze vergelijking, samen met de beginpositie $s(0)$ en -snelheid $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0)$ van het deeltje wordt de beweging ondubbelzinnig vastgelegd. De vergelijking heeft een constante oplossing als het deeltje met snelheid 0 start in een punt $s(0)$ waar $\mathrm{grad} f(s(0)) = 0$. De punten waar $\mathrm{grad} f = 0$ heten stationaire of kritieke punten van de functie f. Op die plaatsen staat het raakvlak aan de grafiek horizontaal, bv. in toppen (maxima), dalen (minima) en bergpassen (zadelpunten). Het hangt van de directe omgeving van het stationaire punt af of dit evenwicht stabiel is. Een top en een zadelpunt zijn bijvoorbeeld geen stabiele evenwichtspunten, een geïsoleerd minimum wel.

We kunnen in de bewegingsvergelijking ook een wrijvingskracht in rekening brengen. Als we veronderstellen dat deze evenredig is met de snelheid $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ (dit is bv. het geval als het deeltje een molekuul in een stroperige vloeistof is, die over het landschap

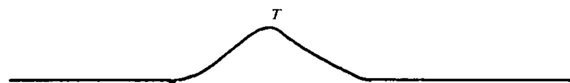
wordt uitgegoten), dan krijgt de vergelijking de vorm:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + b\frac{ds}{dt} + \frac{mg}{1 + \|\text{grad} f(s(t))\|^2}\,\text{grad} f(s(t)) = 0$$

Indien de constante b groot is (bv. in een erg kleverige vloeistof), zal na enige tijd de term met $\frac{ds}{dt}$ over de term met $\frac{d^2s}{dt^2}$ gaan domineren. In dat geval wijst de snelheid (en nu niet meer de versnelling) in de richting van $-\text{grad} f$ en gaat de baan loodrecht op de hoogtelijn staan en rolt het deeltje in de richting waarin de hoogte het snelst afneemt. Dus de inhoud van een leeggegoten kan stroop zoekt automatisch de steilste weg naar beneden, maar water of alcohol gaat kolken en dwarrelen.

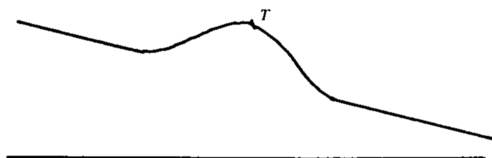
Een extra vraagstuk

De leerstof over hoogtekaarten leent zich goed voor uitbreidingen en leuke vraagstukken, waarvan het volgende klassikaal is uitgeprobeerd.
In figuur 5 is een vertikale dwarsdoorsnede door een berg getekend, die in een overigens horizontaal landschap ligt. Het punt T is de top van de berg. Alle vertikale dwarsdoorsneden door de top van de berg zien er hetzelfde uit. Door een aardverschuiving komt het landschap scheef te staan als in figuur 6 (de berg is niet van vorm veranderd, alleen van stand).
De vraag is nu: Is het punt T in het nieuwe landschap ook een top? Teken kwalitatieve hoogtekaarten van de situaties in de figuren 5 en 6. Let hierbij speciaal op toppen, dalen en zadelpunten. Omschrijf in woorden welke veranderingen in de hoogtekaart veroorzaakt worden door de aardverschuiving.



Figuur 5

Uit deze opgave blijkt dat kritieke punten van een functie veel vertellen over hoe haar grafiek en hoogtekaart er uitzien. Om haar te kunnen maken



Figuur 6

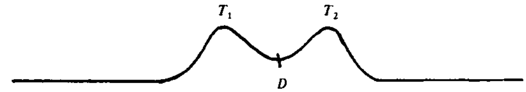
moeten leerlingen weten hoe hoogtekaarten eruit zien in de buurt van kritieke punten. Hierop was de klas voorbereid door te oefenen in het tekenen van hoogtekaarten van bergen, dubbelbergen, kraters, etc. Zo heeft de hoogtelijn in een zadelpunt altijd een dubbelpunt (dat wil zeggen dat zij daar bestaat uit twee takken die dwars op elkaar staan, zoals bij de functie $(x, y) \to x \cdot y$, of in uitzonderlijke gevallen aan elkaar raken, zoals bij de functie $(x, y) \to x^4 - y^2$).
In een geïsoleerd maximum of minimum is de hoogte'lijn' een enkel punt. Hieromheen liggen enkele min of meer regelmatige rondjes. Bevat het landschap een plat horizontaal stuk, dan zou je dat in de hoogtekaart kunnen arceren: hier kun je dus ook niet van een hoogte'lijn' spreken.

Het vraagstuk is erg geschikt om klassikaal te behandelen, omdat de gevraagde hoogtekaart stap voor stap met behulp van suggesties uit de klas kan worden opgebouwd en zelden iemand meteen de goede oplossing ziet. Bovendien toont het aan dat ook sommige kwalitatieve problemen exact, wiskundig nadenken vereisen en stimuleert het misschien leerlingen die denken dat de wiskunde een bundeling rekenrecepten is, een misverstand dat echt niet alleen onder leerlingen heerst.
De docent kan de volgende heuristische methode aanreiken: zet het gehele landschap in gedachten onder water. Waar de waterspiegel de bodem snijdt, loopt een hoogtelijn. Alle hoogtelijnen kun je zichtbaar maken door het water steeds hoger te laten stijgen. Eventuele kuilen moet je van boven af bijvullen met een gieter. Bij de kritieke punten gebeurt er iets bijzonders. Wordt er bijvoorbeeld een geïsoleerde bergtop bereikt, dan steekt er eerst een rondje boven water, vervolgens het uiterste puntje en tenslotte niets meer. Bij het passeren van een geïsoleerd minimum gebeurt ruwweg het omgekeerde: de kuil blijft eerst droog, dan wordt het onderste punt nat en ontstaat er een rond plasje.

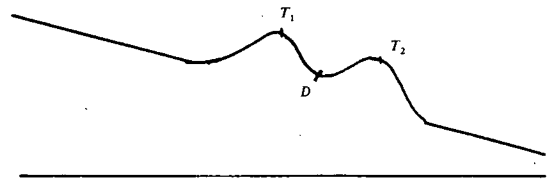
Als er een bergpas wordt gepasseerd, zijn er aan weerszijden hiervan twee bassins met water, die vervolgens door de waterstijging samenvloeien (denk aan een zeestraat).
De bovenstaande gedachtengang is een hoeksteen van de Morsetheorie, een belangrijk onderdeel van de differentiaaltopologie (zie bv. [2] en [3]).

Als we dit toepassen op de scheefgezakte berg, zien we dat deze nog steeds een top heeft, iets verschoven ten opzichte van de oude, en dat er links aan de voet van de berg een zadelpunt is ontstaan. Deze twee punten vinden we in de dwarsdoorsnede van figuur 6 terug, nl. daar waar de raaklijn horizontaal ligt. Ver weg van de berg is het landschap vlak en bestaat de hoogtekaart dus uit evenwijdige rechte lijnen. Verrassend is het drastisch verschil tussen de hoogtekaarten van het oorspronkelijke en het verstoorde landschap en dat dit verschil al optreedt bij de geringste aardverschuiving. Het enige kwalitatieve kenmerk dat behouden blijft is de aanwezigheid van de top; alle andere kritieke punten (nl. de punten van de laagvlakte) verdwijnen en worden vervangen door één van een geheel verschillende soort: een zadelpunt. Dit demonstreert de topologische begrippen stabiliteit en genericiteit. Ieder heuvellandschap kan door een minieme verzakking, erosie of verfrommeling vervormd worden tot een landschap waarin als kritieke punten alleen maar (niet-gedegenereerde) zadelpunten, toppen en dalen voorkomen. Deze landschappen en hun hoogtefuncties heten daarom generiek. Omgekeerd zal een landschap met als kritieke punten slechts (niet-gedegenereerde) maxima, minima en zadelpunten onder willekeurige, niet al te sterke vervormingen geen andere soorten kritieke punten verkrijgen. Deze landschappen heten daarom ook stabiel. Zie voor een precieze formulering en bewijzen van deze beweringen [2] hoofdstuk 6, of [3], hoofdstuk 1.
Een moeilijkere variant van het vraagstuk, dat de lezer zelf mag proberen op te lossen, is het volgende:

In figuur 7 is een vertikale dwarsdoorsnede door een krater getekend. Het punt D is het laagste punt van de kraterholte: de punten T_1 en T_2 liggen even hoog. Alle vertikale dwarsdoorsneden door D zien er hetzelfde uit. Er vindt weer een verzakking plaats (zie figuur 8). Is het punt D in het nieuwe landschap ook een minimum? Teken kwalitatieve hoogtekaarten van de situaties in de figuren 7 en 8 en beschrijf de verschillen tussen de twee kaartjes.



Figuur 7



Figuur 8

Verwijzingen

1 F. Dolmans en anderen, *Situatiebeschrijvingen in wiskundeteksten*, SLO, Enschede (1984)
2 M. Hirsch, *Differential Topology*, Springer, Berlin (1976)
3 V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, London (1974)

Over de auteurs:

Marianne Pranger is lerares wiskunde aan het Christelijk Lyceum te Zeist.
Reyer Sjamaar is wetenschappelijk assistent aan het Mathematisch Instituut te Utrecht. Hij heeft in de periode sept-okt '85 stage gelopen op het Christelijk Lyceum te Zeist.

Grensgevallen II

P. G. J. Vredenduin

Van oudsher dienden (natuurlijke) getallen om hoeveelheden te tellen. Het resultaat van zo'n telproces was een getal, dat de omvang van de hoeveelheid weergaf.
Had men geen hoeveelheid, dan viel er ook niets te tellen. Aan een getal nul had men dan ook geen behoefte. Hierover straks meer. Eerst wil ik de speciale rol van het getal één onder de loep nemen.

Het getal één

Of één tot de natuurlijke getallen gerekend moet worden, is lange tijd problematisch geweest. Als men een hoeveelheid heeft die uit slechts één enkel ding bestaat, valt er niets te tellen. Op grond daarvan trok men in twijfel of één wel tot de getallen behoorde.
Enkele grepen uit de historie:
Euclides (300 v.C.)

> Eenheid is, op grond waarvan elk bestaand ding een eenheid is. Een getal is een hoeveelheid, samengesteld uit eenheden.

Diophantus (250)

> Alle getallen zijn samengesteld uit de een of andere veelheid van eenheden.

Al-Khwarizmi (825)

> Ik ontdekte dat een getal niets anders is dan datgene dat samengesteld is uit eenheden. Eenheid is begrepen in elk getal.

Het rekenboek uit Treviso (1478)
Dit is het oudst bekende gedrukte rekenboek waarin met decimaal geschreven getallen gerekend wordt. De schrijver zegt:

> Getal is een veelheid samengenomen ... uit vele eenheden, en steeds uit ten minste twee zoals in het geval van 2, hetgeen het eerste en kleinste getal is.

Simon Stevin (1585) is een andere mening toegedaan. Hij zegt:

> La partie est de mesme nature que le tout. Unité est partie d'une multitude d'unitez ... et par conséquent mombre.

Later ging de aandacht zich meer concentreren op de meetfunctie van de getallen. Het getal werd een verhoudingsgetal. De reden 1 uit te zonderen verviel daarmee.
Zo zegt Newton (1642-1727) dat een getal is

> datgene dat zich tot de eenheid verhoudt als een rechte lijn tot een bepaalde rechte.

Volgens Euler (1707-1781) komt het erop aan

> dasz man bestimme, in was für einen Verhältnisz die vorgegebene Grösze gegen dieses Masz stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so dasz eine Zahl nicht anders ist als das Verhältnisz, worinne eine Grösze gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht.

Het getal 1 geeft nu de verhouding weer van de eenheid tot zichzelf en heeft als zodanig niets bijzonders.
Eind 18e eeuw is de strijd definitief beslist en wordt 1 door ieder geaccepteerd als getal.
Autonome wiskunde is eerst van de laatste tijd. Tot een eeuw geleden was de wiskundige begripsvorming verankerd in de realiteit. Grensgevallen worden dan ook nog niet beslist op pragmatische gronden, maar op principiële. Ten gevolge van gewijzigde interpretatie van 'getal' wordt de uitzonderingspositie van 1 opgeheven. Daarmee is over een grensgeval een beslissing genomen.

Het getal nul

Met nul lag het anders. Op grond van interpretatie in de realiteit had nul geen enkele functie. De vraag was dus niet of nul een getal is. Deze vraag kon niet ontstaan, want, in tegenstelling tot één kwam het woord 'nul' in de vocabulaire niet voor.
Toch had men in de oudheid reeds behoefte aan een symbool om een ontbreken aan te geven.

Zo kwamen bij Ptolemaeus (130) tafels voor waarin hoeken opgegeven werden in graden, minuten en seconden. Ontbraken de graden, dan zette men in de kolom van de graden een kringetje (○). Analoog als minuten of seconden ontbraken. Dit symbool duidde dus een lege plaats aan.

Zodra men getallen positioneel gaat schrijven, heeft men een symbool nodig om een lege plaats in het getal aan te geven. Positionele schrijfwijze kwam voor bij de Babyloniërs. Zij rekenden in het zestigtallig stelsel. Het cijfer 1 schreven zij: 𒁹. 61 wordt dan 𒁹𒁹. En 3601 ook 𒁹𒁹, maar nu moest men op de een of andere manier aangeven dat er tussen de beide spijkers een teken ontbreekt. De Babyloniërs gebruikten daarvoor, in de periode omstreeks 200 v.C., het teken 𒑱, dat scheiding betekent. 3601 schreven ze dus 𒁹𒑱𒁹. Toch was hun schrijfwijze nog lang niet volmaakt. Aan het eind van een getal gebruikten ze het teken 𒑱 nooit. Dit heeft nare gevolgen. Hierdoor kan bijv. 𒌋𒌋𒁹 het getal 21 voorstellen, maar ook $21 \cdot 60$, $21/60$ en meer algemeen $21 \cdot 60^k$ (k geheel).

De oudst bekende geheel correcte positionele schrijfwijze vinden we bij de Maya's in de 3e of 4e eeuw v.C. Ze hanteerden een twintigtallig positiestelsel en gebruikten daarbij consequent een teken voor 'nul', d.w.z. voor het aanduiden van een open plaats.[1])

Onze decimale schrijfwijze is, zoals bekend, afkomstig uit India. Daar vinden we in de 8e eeuw een positionele schrijfwijze met gebruik van een teken 'nul'. Via de Arabieren is deze schrijfwijze in West-Europa doorgedrongen en heeft daar na eeuwenlange strijd tegen de Romeinse cijfers in de loop van de 16e eeuw algemeen burgerrecht verkregen.

Zodra zich een rekentechniek ontwikkelt, zal met het cijfer 0 gerekend moeten worden. In het rekenboek uit Treviso worden daarvoor regels opgesteld. Deze luiden:

$0 + 8 = 8$, want als er geen tientallen zijn en men telt daar 8 tientallen bij, dan krijgt men 8 tientallen:
$6 \cdot 0 = 0$, want als de honderdtallen ontbreken en we nemen ze 6 maal, dan blijven ze ontbreken.

Tot hier toe is van een *getal* 0 nog geen sprake. Er is alleen sprake van een *cijfer* 0, dat diende om een open plaats te markeren, en van een technisch rekenen met dit cijfer.

Van een getal 0 is eerst sprake als men algebra gaat bedrijven. Wordt gevraagd de vergelijking $x^2 = x$ op te lossen, dan zijn er twee mogelijkheden:
- men acht het geoorloofd beide leden te delen door x en vindt dan als enige wortel 1;
- men vindt als wortels 1 en 0.

In het eerste geval werkt men met een getalsysteem waarin een getal 0 (neutraal element van de optelling) ontbreekt;
in het tweede geval werkt men met een getalsysteem dat een dergelijk element wel bevat.

Hoe heeft men in de historie op dit probleem gereageerd? Weer enkele grepen.

Vieta (1540-1603) stelt regels op voor het oplossen van vergelijkingen. Eén van die regels luidt:
Een vergelijking verandert niet als we door de onbekende delen.

Hij past deze regel toe bij het oplossen van $x^3 + ax^2 = b^2x$. Deze vergelijking herleidt hij tot $x^2 + ax = b^2$. We behoeven ons daarover niet te verwonderen. Bij Vieta wordt de algebra meetkundig geïnterpreteerd. x^3, ax^2 en b^2x stellen inhouden voor, x^2, ax en b^2 oppervlakten. Inhouden en oppervlakten zijn positief en niet gelijk aan 0.

Cardano (1501-1576) zegt:

> If there is no number, reduce one of the two given terms to a number by dividing both equally.

Wat hij hiermee bedoelt, wordt duidelijk door het volgende door hem gegeven voorbeeld:
$7x^2 = 21x^6$ reduceren we tot $7 = 21x^4$.

Ook Cardano werkt met geometrische interpretatie. Hij kent negatieve wortels, maar ook deze worden geometrisch geïnterpreteerd. Daardoor is er voor 0 geen plaats.

Hetzelfde geldt voor Descartes (1596-1650). In zijn Geometrie komt nergens 0 als wortel van een vergelijking voor, maar wel deelt hij beide leden rustig door x.

Een opvallende uitzonderingspositie in deze rij neemt Simon Stevin (1548-1620) in. Hij geeft als wortels van de vergelijking $x^3 = 2x$ op: 0, $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$. Daarmee was hij zijn tijd ver vooruit.

Een andere geometrische benadering van de algebra is die door middel van de getallenlijn resp. het coördinatenstelsel. Wie aan punten van een lijn positieve en negatieve getallen toekent, kan er niet omheen aan één van de punten het getal 0 toe te voegen. En als men dan ertoe overgaat aan punten van het platte vlak geordende paren getallen toe te

voegen, zal men aan de oorsprong het paar (0,0) dienen toe te voegen. De eerste die met een dergelijk 'Cartesiaans' coördinatenstelsel gewerkt heeft, is Newton (1642-1727). Geen wonder dus dat hij het getal 0 aanvaardde.

Hiermee is weer over een grensgeschil beslist. De redenen zijn van pragmatische aard. Zolang we in verband met de aard van de geometrische interpretatie van de algebra een getal nul niet nodig hebben en er zelfs geen weg mee weten, ontstaat het niet. Maar zodra het onmisbaar wordt, zoals bij de constructie van de getallenlijn en bij het werken met een Cartesisch coördinatenstelsel, wordt het aanvaard.

Is 0 een natuurlijk getal?

Er duikt een nieuw grensgeschil op. Zijn de natuurlijke getallen de getallen 1, 2, 3, 4, ... of behoort 0 er ook toe?

Dit probleem is verwoven met een serie problemen: de omschrijving van 'verzameling', de vraag of er een lege verzameling bestaat, het kardinaalgetal van een verzameling. Ik wil nagaan hoe deze vragen door de grote meesters circa 1900 beantwoord zijn.

Allereerst Cantor. In zijn beroemde artikel *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, dat in 1895 in de Mathematische Annalen verscheen, definieert hij *verzameling* aldus:

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens ... zu einem Ganzen.

Conform deze definitie is er voor een lege verzameling geen plaats.

Het kardinaalgetal van een verzameling ontstaat, als we abstraheren van de aard van zijn verschillende elementen en van de volgorde waarin deze gegeven zijn.

Twee verzamelingen heten equivalent als er een bijectie tussen bestaat. Twee verzamelingen hebben hetzelfde kardinaalgetal wil dus niets anders zeggen dan dat ze equivalent zijn. Een verzameling die uit een enkel element e_0 bestaat, heeft (per definitie) kardinaalgetal 1. Voegen we aan deze verzameling een nieuw element e_1 toe, dan ontstaat een verzameling met kardinaalgetal 2 enz. Zo ontstaat de rij van eindige kardinaalgetallen 1, 2, 3, ... En 0 wordt daarbij dus uitgesloten.

Dedekind heeft het probleem natuurlijk getal behandeld in *Was sins und was sollen die Zahlen?* (1887). Hij gaat daarbij uit van het begrip *System*, dat hij als volgt omschrijft:

> It very frequently happens that different things, *a*, *b*, *c*, ... for some reason can be considered from a common point of view, can be associated in the mind, and we say that they form a *system S*.
>
> (met excuses voor het feit dat ik alleen een Engelse vertaling bezit)

Hij voegt er expliciet aan toe dat hij het lege systeem, dat geen enkel element bevat, uitsluit in deze verhandeling. Gevolg is dat de rij van de natuurlijke getallen bij Dedekind begint met 1. Het zou te ver voeren hier nader op in te gaan. Een korte samenvatting van de methode van Dedekind kunt u vinden in mijn artikel *Historische ontwikkeling van het begrip natuurlijk getal* in Wiskunde en Onderwijs nr. 37 (1984) op blz, 34-36.

Wel wil ik uitvoeriger stilstaan bij de ideeën van Frege, die hij ontwikkeld heeft in *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884). Zijn uitgangspunt is het *Begriff*.

Frege gaat als volgt te werk. De relatie tussen twee begrippen F en G

> dem Begriffe F kommt dieselbe Zahl wie dem Begriffe G zu

definieert hij, modern uitgedrukt, als: er is een bijectie tussen F en G. Deze relatie is een equivalentierelatie. De erdoor bepaalde equivalentieklassen noemt hij getallen.

> Die Anzahl welche dem Begriffe F zukommt

is dus de equivalentieklasse waartoe F behoort (der Umfang des Begriffes 'gleichzahlig dem Begriffe F').

Nu komt de clou. Hij zegt:

> 0 is die Anzahl, welche dem Begriffe 'sich selbst ungleich' zukommt.

Uitgaande van 0 bouwt hij verder:

> 1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe 'gleich 0' zukommt.

De gedachtengang van Frege komt er nu verder op neer, dat 2 uit 0 en 1 ontstaat door te stellen: 2 is het aantal dat toekomt aan het begrip 'gelijk 1 of gelijk

0' enz. Frege bouwt dus de natuurlijke getallen op door te beginnen met 0, dat dan vanzelfsprekend tot de natuurlijke getallen behoort.
Het typische verschil tussen Frege enerzijds en Cantor en Dedekind anderzijds is, dat Cantor en Dedekind een verzameling opgebouwd denken uit elementen, terwijl Frege een verzameling door een eigenschap bepaald ziet. Daardoor kan bij Cantor en bij Dedekind een verzameling niet leeg zijn en bij Frege wel. En daarmee hangt weer samen dat Cantor en Dedekind 0 niet en Frege 0 wel tot de natuurlijke getallen rekent.
Russell noemt een verzameling *class*. In zijn *Principia Mathematica* (1910) zegt hij:

> The characteristics of a class are that it consists of all the terms satisfying some propositional function.

Een propositionele functie is een propositie waarin een niet-gebonden variabele voorkomt. Anders gezegd: een eigenschap.
En dan:

> The null-class is the class which has no numbers.

Een verzameling kan dus leeg zijn. Het ligt voor de hand dat dan ook 0 tot de natuurlijke getallen gerekend wordt. Russell vindt dat zo vanzelfsprekend dat hij in zijn *Introduction to Mathematical Philosophy* zegt, dat iemand met doorsnee-ontwikkeling 1, 2, 3, 4, ... voor de rij van de natuurlijke getallen aanziet. Maar iemand die een zekere mathematische ontwikkeling bezit, zal 0, 1, 2, 3, ..., n, $n+1$, ... de rij van de natuurlijke getallen noemen.
Peano moet in dit verband zeker ook genoemd worden. Hij bouwt de natuurlijke getallen axiomatisch op. Daarbij gaat hij uit van drie grondbegrippen: N (natuurlijk getal), 1 en opvolger. Twee van zijn axioma's luiden:
1 is een natuurlijk getal
er is geen natuurlijk getal dat 1 als opvolger heeft.
Commentaar overbodig.
Russell moet natuurlijk wel toegeven dat Peano tot de mensen behoort die een zekere mathematische ontwikkeling hebben. Dat doet hij dan ook. Hij zegt dat twee van zijn axioma's luiden:
0 is een natuurlijk getal en 0 is geen opvolger van een natuurlijk getal. Zo zie je dat een lichte arrogantie nare gevolgen kan hebben.
Tot de mensen met slechts matige wiskundige ontwikkeling behoort blijkbaar ook onze landgenoot Schuh. Hij schreef in 1928 *Het natuurlijke getal in zoo streng mogelijke behandeling*. Voor hem was een natuurlijk getal

> een teeken, dat ik kan neerschrijven met behulp van het volgende tweeledige voorschrift:
> 1. Ik schrijf een teeken van de vorm 1 neer;
> 2. heb ik een teeken a neergeschreven, dan kan ik daaruit maken a + 1.

Op geheel andere gronden wordt 0 hier uitgesloten.
Al met al zijn we nog weinig verder gekomen. We zien dat sommigen 0 tot de natuurlijke getallen rekenen en anderen niet. Een doorslaggevend argument op grond waarvan we een beslissing kunnen nemen, hebben we niet gevonden.
Intussen zijn we op een verwant grensprobleem gestoten, namelijk: kan een verzameling leeg zijn? Ik wil me eerst met dit laatste probleem bezighouden om daarna naar het getal 0 terug te keren.

Kan een verzameling leeg zijn?

Zolang het begrip verzameling zo vaag omschreven is als bij Cantor, Frege en Dedekind het geval is, blijft het probleem van de lege verzameling eveneens vaag. Gelukkig is er een dwingende reden geweest nader te preciseren wat onder een verzameling verstaan wordt. Het vage begrip verzameling bleek tot strijdigheden te leiden. Russell ontdekte dit in 1903. Zijn paradox kwam op het volgende neer.

$V \stackrel{\text{def}}{=}$ de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten.

Dus: $v \in V \stackrel{\text{def}}{=} v \notin v$.

Hieruit volgt: $V \in V \Leftrightarrow V \notin V$.
Dus: als V zichzelf als element bevat, dan bevat hij zichzelf niet als element. V kan dus zichzelf niet als element bevatten. Maar als V zichzelf niet als element bevat, dan bevat hij per definitie zichzelf wel als element. Dat kan dus ook niet. Deze contradictie maakt het noodzakelijk zich te bezinnen op de betekenis van het begrip verzameling. Dit moet zo gepreciseerd worden dat dergelijke contradicties niet optreden. Men bereikte dit door het vormen van verzamelingen aan banden te leggen. De eerste die een axiomatiek van de verzamelingenleer op-

stelde waarin vastgelegd werd welke verzamelingen toelaatbaar zijn, was Zermele (1908). Helaas is één van zijn axioma's: er is een nulverzámeling, die geen enkel element bevat. We zijn nu nog niet wijzer. De Gordiaanse knoop is doorgehakt, maar op grond waarvan blijft onduidelijk.
Meer licht verschaft ons Fraenkel, die in zijn *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre* (1927) een variant ontwikkelt van het systeem van Zermelo. Een van zijn axioma's luidt:

Ist m eine Menge und $\mathcal{E}$ eine für die Elemente von m sinnvolle Eigenschaft, so existiert die Teilmenge m_ε, welche all diejenigen Elemente von m – und nur sie – zu Elementen besitzt, denen die Eigenschaft $\mathcal{E}$ zukommt.

Dit axioma rechtvaardigt het gebruik van onze huidige setbuilder $\{x \in V | E(x)\}$.
'Sinnvolle Eigenschaft' moet nog nader omschreven worden, maar dat doet Fraenkel dan ook.
Het is duidelijk dat er nu een Nullmenge (lege verzameling) bestaat. Neem een verzameling m en laat $\mathcal{E}$ een eigenschap zijn die aan geen enkel element van m toekomt, dan is de verzameling van alle elementen van m die de eigenschap $\mathcal{E}$ hebben, leeg.
In onze symboliek is bijvoorbeeld:

$\{x \in V | x \notin V\} = \varnothing$.

De vorming van deelverzamelingen met behulp van de setbuilder leidt zo vanzelf tot de existentie van de lege verzameling.

In het bijzonder geldt: $V \cap W \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V | x \in W\}$.

Nu prijzen we ons wel gelukkig dat de lege verzameling geaccepteerd is. Was dat niet het geval, dan was de doorsnede van twee verzamelingen niet steeds weer een verzameling. Kortom, de ellende was niet te overzien.
Nu de lege verzameling geaccepteerd is, keren we terug naar het vorige probleem:

Is 0 een natuurlijk getal?

Ik grijp terug op het boek van Schuh over *Het natuurlijke getal*. Niet dat ik dit boek historisch van enig belang vind, maar ik kan het zo uitstekend gebruiken om een en ander duidelijk te maken.
Nadat Schuh het natuurlijke getal als teken, bestaande uit een serie 1′ en ingevoerd heeft, constateert hij dat dit natuurlijke getal in de praktijk uitstekend gebruikt kan worden bij het tellen van een hoeveelheid. Ruw gezegd geschiedt dit door te turven.
Zijn laatste hoofdstuk begint als volgt:

Aan het stelsel der natuurlijke getallen wordt *het getal* 0 (*nul*) toegevoegd. De zoo ontstaande getallen noemen we *aantallen*. Ook het getal 0 kan nl. als aantal elementen eener hoeveelheid optreden, indien we ook toelaten, *dat een hoeveelheid geen enkel element bevat*, dus leeg is.

Nu definieert hij de rekenoperaties met 0. Zijn definities komen op het volgende neer:

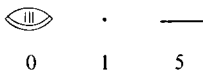
$$a \neq 0 \Leftrightarrow a > 0$$
$$a + 0 = 0 + a = a$$
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Hierin stelt a een aantal voor.
Schuh heeft uitvoerig de fundamentele eigenschappen van de optelling en vermenigvuldiging van natuurlijke getallen bewezen en ook de eigenschappen van de volgorde, mede in verband met optellen en vermenigvuldigen. Hij heeft zijn getalbegrip nu met het getal 0 uitgebreid tot de aantallen. Daardoor is hij verplicht alle eigenschappen die voor natuurlijke getallen door hem bewezen zijn, opnieuw te bewijzen voor aantallen. Gelukkig gaat dat vrij snel, maar in principe is dit toch wel een schrikbeeld. kan dat heus niet wat eleganter?
We vatten de gedachtengang van Frege weer op, in iets gemoderniseerde vorm. Twee verzamelingen zijn equivalent als er een bijectie tussen bestaat. Een verzameling is eindig als hij met geen enkele echte deelverzameling equivalent is. Het kardinaalgetal van V is de verzameling van alle verzamelingen die equivalent met V zijn. Notatie: $\# V$.
En nu komt het:
Een natuurlijk getal is een kardinaalgetal van een eindige verzameling.
$\varnothing$ is een eindige verzameling. $\#\varnothing = 0$ (per definitie). Dus is 0 een natuurlijk getal.
We definiëren optelling, vermenigvuldiging en volgorde van natuurlijke getallen (inclusief 0!).
Als $a = \# A$, $b = \# B$ en $A \cap B = \varnothing$, dan is $a + b = \#(A \cup B)$.
Als $a = \# A$ en $b = \# B$, dan is $a \cdot b = \#(A \times B)$.
Hierin is $A \times B$ de produktverzameling van A en B,

d.i. de verzameling van alle geordende paren waarvan het eerste element tot A en het tweede tot B behoort.
Als $a = \#A$, $b = \#B$ en B equivalent is met een echte deelverzameling van A, dan is $a > b$.
Waarna we ineens de fundamentele eigenschappen voor zowel 1, 2, 3, ... als 0 kunnen bewijzen.
Zowel het accepteren van de lege verzameling als het opnemen van het getal 0 onder de natuurlijke getallen geschiedt dus op pragmatische gronden. Het berust op een beslissing genomen door wiskundigen.

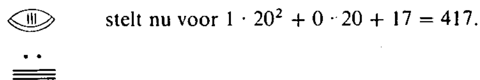
Noot:

1 De Maya's bouwden hun getallen op met behulp van drie cijfertekens:



0 1 5

De tekencombinatie



Een fout in het wiskunde A examen?

T. H. Chen

Met duizenden collega's heb ik mij dit jaar vol goede moed en enthousiasme op het wiskunde A programma gestort. Tot nog toe is mijn indruk positief, al zie ik niet altijd wat de diverse onderwerpen met wiskunde te maken hebben, hetgeen ik overigens geen bezwaar vind. Men verwerft bij wiskunde A nuttige kennis en vaardigheden, en welk etiket daar op geplakt wordt, is bijzaak. Wat ik wel een bezwaar vind, is dat de nieuwe stof veel aanleiding geeft tot vraagstukken waarbij niet duidelijk is wat nu precies het antwoord is. Zo kwam ik onlangs in de klas voor een verrassing te staan bij een examenopgave uit het boek, n.l. opgave 1 van de 2e periode 1984. Jammer genoeg had ik mijn les niet voorbereid, maar de vraag leek vrijwel wiskundig van aard te zijn, zodat ik weinig problemen verwachtte. Bij de onderdelen e en f echter kreeg ik het toch wel even benauwd. Voor wie Euclides 7, jaargang 1984/85 niet bij de hand heeft, vat ik het probleem kort samen: Iemand maakt in een landschap een wandeling die op een hoogtekaart met x,y-coördinatenstelsel wordt voorgesteld door de lijn $y = -x$. De wandeling begint in $S(-1, 1)$ en eindigt in $Q(1, -1)$. De hoogte van het landschap wordt weergegeven door de functie $H(x, y) = x^3 - y$.
Bewijs dat de wandelaar voortdurend moet klimmen, en vind de minimale waarde van de helling.
Het bewijs leveren lukte nog wel met enige moeite: stel $h(x) = H(x, -x) = x^3 + x$, dan geeft deze functie de hoogte tijdens de wandeling, uitgedrukt in de projectie op de x-as. $h'(x) = 3x^2 + 1$, en dit is uiteraard > 0. Verder neemt tijdens de wandeling x ook steeds in waarde toe, zodat de wandeling inderdaad een klim is. Dat de helling minimaal is

voor $x = 0$ kon ik ook snel genoeg duidelijk maken, maar hoe groot is de helling in het punt (0, 0)? Gelukkig kon ik nog voor de bel ging een aannemelijke redenering vinden: $h'(0) = 1$, maar aangezien de wandelaar niet over de x-as loopt, is dit een maat voor de verticale stijging gedeeld door de *schijnbare* horizontale verplaatsing. De *werkelijke* horizontale verplaatsing is $\sqrt{2}$ maal zo groot, zodat de helling $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ is, en de hellingshoek ca. 35°. Later bedacht ik de wiskundig correcte redenering: de helling wordt weergegeven door de richtingsafgeleide in de richting $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{H(\frac{1}{2}t\sqrt{2}, -\frac{1}{2}t\sqrt{2}) - H(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{4}t^3\sqrt{2} + \frac{1}{2}t\sqrt{2}}{t} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Aangezien noch het wiskunde A programma, noch het boek de richtingsafgeleide noemen, begon ik me af te vragen of het niet eenvoudiger kon. Thuis gekomen, keek ik direct bij de antwoorden in het boekje Opgaven wiskunde A vwo'. Tot mijn geruststelling zag ik, dat het allemaal veel eenvoudiger was dan ik had gedacht: op blz. 75 las ik:
'e. op SQ geldt $y = -x$ dus $H(x, -x) = x^3 + x$ dus $H'(x, -x) = 3x^2 + 1 > 0$ dus voortdurend stijgend
f. $3x^2 + 1$ is minimaal voor $x = 0$, dus in (0, 0) is de hellingshoek minimaal $H'(0, 0) = 1$ dus de hellingshoek is 45°'
Dat de redenering niet vlekkeloos is, zij de schrijvers van het opgavenboekje vergeven: ook in het wiskunde I en II-tijdperk werd wel eens wat slordig met sommige zaken omgesprongen. Maar tot nu toe was het toch wel gebruikelijk dat in ieder geval het antwoord correct was: is deze gewoonte nu ook verdwenen? Wat er in de officiële normen van het betreffende examen heeft gestaan, kon ik nog niet achterhalen (de bibliotheek van het Ministerie van Onderwijs heeft alle examens keurig ingebonden, alleen niet dit experimentele examen, dat slechts op twee scholen is afgenomen). Hoeveel punten zouden er bijvoorbeeld worden toegekend aan de leerling die bij onderdeel e. opschrijft:
op SQ geldt $x = -y$ dus $H(-y, y) = -y^3 - y$ dus $H'(-y, y) = -3y^2 - 1 < 0$ dus voortdurend dalend

De redenering is precies even correct als de boven geciteerde, en leidt alleen maar *toevallig* niet naar het juiste antwoord. Ook ben ik erg benieuwd of de normen een oplossingsmethode noemen die de leerlingen redelijkerwijs moeten kunnen vinden.

***Over de auteur*:**

T. H. Chen heeft wiskunde gestudeerd aan de Rijksuniversiteit van Leiden en is sinds 1979 verbonden aan het Stedelijk Gymnasium te Schiedam.

De weekdag uit het hoofd berekend

J. Kieft

Inleiding

Sinds het begin van onze jaartelling, die een voortzetting is van de destijds bestaande Romeinse tijdrekening, zijn er ruim 700.000 dagen verlopen, om precies te zijn 725.008 vanaf 1 januari 1 tot en met 31 december 1985. De dagen worden ingedeeld in maanden, jaren en eeuwen en, onafhankelijk daarvan, in pakketjes van 7, de weken.
Bij iedere datum behoort aldus een weekdag. Om die te vinden raadplegen we een kalender. Die zijn er voor een enkel jaar en voor langere perioden, bv. de periode 1830/2000. Er bestaan verschillende systemen; bijzonder fraai en doelmatig is de 'eeuwigdurende' kalender van Moret, die in een paar kleine tabelletjes alle data geeft vanaf het jaar 1 tot in de verre toekomst.

De gevraagde weekdag kan ook door berekening gevonden worden. Stel het is vandaag vrijdag en ik wil de weekdag van een toekomstige datum weten, dan bereken ik het aantal dagen tussen nu en dan en deel dat door 7. Is de rest 2, dan is de gevraagde weekdag een zondag. Een nogal bewerkelijke methode. Het kan echter ook veel eenvoudiger, zoals hierna zal blijken.

Schrikkeldagen en schrikkeljaren

Willen de seizoenen in het kalenderjaar hun plaats behouden, dan moet de lengte van dat jaar zijn afgestemd op die van het zgn. tropisch jaar, naar wij thans weten ca. 365,2422 dagen. Een gewoon kalenderjaar heeft echter een geheel aantal dagen, t.w. $7 \times 31 + 4 \times 30 + 28 = 365$. Door nu in sommige jaren aan de maand februari een schrikkeldag toe te voegen kan worden bereikt dat de gemiddelde lengte van de kalenderjaren die 365,2422 dagen toch goed benadert.
In de sinds het begin bestaande Juliaanse kalender was ieder door 4 deelbaar jaar een schrikkeljaar en bedroeg de gemiddelde jaarlengte 365,2500 dagen. Dat was dus 0,0078 dag of 11 minuten te lang, welk verschil in de 16e eeuw was opgelopen tot 10 dagen. Men besloot daarom in 1582 op de Gregoriaanse kalender over te stappen, die van de Juliaanse afwijkt door het overslaan van bepaalde data, t.w. ineens de 10 data van 5 t/m 14 oktober 1582 en later de schrikkeldata in de niet door 400 deelbare eeuwjaren. Op donderdag 4 oktober 1582 Jul. volgde dus vrijdag 15 oktober 1582 Greg. en van de eeuwjaren na 1500 zouden alleen 1600, 2000, 2400 enz. nog schrikkeljaar zijn.
Het voorgaande betekent dat in de periode van 1 tot en met 2099 ieder door 4 deelbaar jaar een schrikkeljaar is, behalve de 3 eeuwjaren 1700, 1800 en 1900.
In de 400-jarige Gregoriaanse periode van 1 januari 1600 t/m 31 december 1999 vielen dus 3 data, t.w. 29 februari 1700, 1800 en 1900, uit.
De gemiddelde jaarlengte wordt daardoor 3/400 dag = 0,0075 dag korter, dus 365,2425 dagen. Dat is nog steeds 0,0003 dag of 26 seconden te lang, maar het verschil is nu zo klein geworden, t.w. 1 dag in ca. 3000 jaar, dat een nadere correctie pas in de verre toekomst nodig zal zijn. Het aantal dagen in genoemde periode is $400 \times 365 + 97 = 146097$, wat een 7-voud is. Hieruit volgt dat in de Gregoriaanse kalender een willekeurige datum op dezelfde weekdag valt als de datum precies 400 jaar later (bv. 3 januari 1584 = 3 januari 1984 = dinsdag) en ook dat de eeuwcode (zie onder) 4 eeuwen later weer dezelfde is, bv. 1900 = 2300 = 2700 enz. In de Juliaanse kalender zijn reeds na 28 jaar alle weekdagen weer dezelfde.

Formule

Het schema van Moret leidde ons tot een formule om de weekdag bij een gegeven datum uit het hoofd te bepalen; deze formule is eenvoudig aan te leren en te onthouden en kan op alle data vanaf het jaar 1

tot zeg het jaar 3000 worden toegepast.
Grondslag ervan vormen onderstaande 'codes', die uit het hoofd geleerd moeten worden, wat een kleine moeite is.

Maandcodes

januari 1, februari 4, maart 4, april 0, mei 2, juni 5, juli 0, augustus 3, september 6, oktober 1, november 4, december 6.
Kwartaalsgewijs samengenomen: 144, 025, 036, 146, te onthouden als 'gros, nul vijf kwadraat, nul zes kwadraat, gros plus twee'.
N.B. in een schrikkeljaar zijn de maandcodes voor januari en februari 1 lager, dus 0 en 3.

Eeuwcodes

Juliaans (1 januari t/m 4 oktober 1582) 18 – E, dus 18 voor 000, 17 voor 100, 16 voor 200, 15 voor 300, ... 4 voor 1400, 3 voor 1500.
Gregoriaans (vanaf 15 oktober 1582)
0 voor 1500, 1900, 2300 enz.
6 voor 1600, 2000, 2400 enz.
4 voor 1700, 2100, 2500 enz.
2 voor 1800, 2200, 2600 enz.

Jaarcode

Voor ieder jaar te vinden uit het jaartal door het optellen van drie getallen: a. de eeuwcode, b. het getal gevormd door de twee laatste cijfers, c. dat getal gedeeld door 4 (rest niet van belang). Dus voor 1839 = 2 + 39 + 9 = 1 (zie onder).

Weekdagcodes

Zaterdag 0, zondag 1, maandag 2, dinsdag 3, woensdag 4, donderdag 5, vrijdag 6.
Voor een gegeven datum, bestaande uit dag, maand en jaar, telt men op de dag, de maandcode en de jaarcode. De uitkomst wordt door 7 gedeeld en de

---

Voorbeelden:

20 september 1839 (opening van de spoorlijn Amsterdam-Haarlem) =
20 + 6 + 2 + 39 + 9 = 6 + 6 + 2 + 4 + 2 = 20 = 6 = vrijdag.
31 januari 1938 (geboortedatum van koningin Beatrix) =
31 + 1 + 38 + 9 = 3 + 1 + 3 + 2 = 9 = 2 = maandag. Men kan ook zeggen: 31 + 1 + 38 = 70, valt weg, blijft over 9 = maandag.

Andere voorbeelden (nu verkort weergegeven):

1 januari	1	= 1 + 1 + 18 + 1 = 0 = zaterdag
14 oktober	1328	= 1 + 5 = 6 = vrijdag
4 oktober	1582	= 4 + 1 + 3 + 5 + 6 = 5 = donderdag
15 oktober	1582	= 1 + 1 + 5 + 6 = 6 = vrijdag
24 juli	1635	= 3 + 6 + 8 = 3 = dinsdag
29 februari	1756	= 1 + 3 + 4 = 1 = zondag
18 juni	1815	= 4 + 5 + 2 + 1 + 3 = 1 = zondag
28 april	1903	= 3 = dinsdag
16 juni	1907	= 2 + 5 + 1 = 1 = zondag
31 december	1999	= 3 + 6 + 1 + 3 = 6 = vrijdag
1 januari	2000	= 1 + 6 = 0 = zaterdag
16 maart	2284	= 2 + 4 + 2 = 1 = zondag

rest bij die deling is de code van de gevraagde weekdag. Omdat het uitsluitend om die rest te doen is, kunnen in de optelling verschijnende 7-vouden direct wegvallen, bv. 31 + 4 = 0, 18 = 4, 43 = 1, 73 = 3 enz. De berekening wordt daardoor sterk vereenvoudigd. Soms blijft er in het geheel niets meer te tellen over, bv. bij 28 juli 1984 - dat is dus een zaterdag.

Eeuwigdurende kalender volgens Moret

Voorbeeld: 14 juni 1679: tabel I geeft 6, II geeft 4, III geeft woensdag.
Ook te beantwoorden vragen als: in welke jaren na 1600 met jaartal eindigend op 7 viel 1 augustus op donderdag? Antwoord (III, II, I): 1647, 1697, 1737, 1867, 1907, 1957 enz.
In I rechtsonder herkennen we de eeuwcodes en jaarcodes, in II lijn 0 de maandcodes en in III lijn 0 de weekdagcodes.

I *Eeuwen* Juliaans - tot en met 4 okt. 1582			Gregoriaans - vanaf 15 okt. 1582									
						00	01	02	03	..	04	05
						06	07	..	08	09	10	11
						..	12	13	14	15	..	16
						17	18	19	..	20	21	22
						23	..	24	25	26	27	..
						28	29	30	31	..	32	33
						34	35	..	36	37	38	39
						..	40	41	42	43	..	44
						45	46	47	..	48	49	50
						51	..	52	53	54	55	..
						56	57	58	59	..	60	61
						62	63	..	64	65	66	67
						..	68	69	70	71	..	72
						73	74	75	..	76	77	78
						79	..	80	81	82	83	..
						84	85	86	87	..	88	89
						90	91	..	92	93	94	95
						..	96	97	98	99	..	..
0	7	14	..	17	21	4	5	6	0	1	2	3
1	8	15	..	..	..	3	4	5	6	0	1	2
2	9	..	..	18	22	2	3	4	5	6	0	1
3	10	..	..	..	..	1	2	3	4	5	6	0
4	11	..	15	19	23	0	1	2	3	4	5	6
5	12	..	16	20	24	6	0	1	2	3	4	5
6	13	..	..	..	..	5	6	0	1	2	3	4

II	JA OK -	ME - -	AU FE-S -	FE MA NO	JUN - -	SE DE -	AP JUL JA-S
1	2	3	4	5	6	0	1
2	3	4	5	6	0	1	2
3	4	5	6	0	1	2	3
4	5	6	0	1	2	3	4
5	6	0	1	2	3	4	5
6	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	0
JA-S en FE-S: in schrikkeljaar							

III	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	7 14 21 28
1	ma	di	wo	do	vr	za	zo
2	di	wo	do	vr	za	zo	ma
3	wo	do	vr	za	zo	ma	di
4	do	vr	za	zo	ma	di	wo
5	vr	za	zo	ma	di	wo	do
6	za	zo	ma	di	wo	do	vr
0	zo	ma	di	wo	do	vr	za

Nuljaren

Jaren waarvan de jaarcode 0 is noemen we nuljaren. Weet men eenmaal dat een jaar een nuljaar is, dan is de weekdag nog iets sneller te vinden, bv. 17 maart 1781 = zaterdag. De nuljaren van deze eeuw zijn: 1900, 1906, 1917, 1923, 1928, 1934, 1945, 1951, 1956, 1962, 1973, 1979, 1984 en 1990. U vindt ze in de linkerkolom bovenaan bij Moret.
Zo zijn er ook in ieder jaar een of meer nulmaanden (maandcode + jaarcode = 0), dat zijn dus maanden waarvan de eerste dag op een zondag valt.

Aantal dagen

Interessant is ook het aantal dagen te berekenen tussen twee data die op dezelfde weekdag vallen en te constateren dat dit aantal een 7-voud is.
Bv. maandag 25 augustus 1483 en maandag 17 oktober 1983. Aantal dagen $= 53 + (1983 - 1483) \times 365 - 10 + (1980 - 1484) : 4 + 1 - 3 = 182665 = 7 \times 26095$. Denk hierbij aan 1582, 1700, 1800 en 1900.

Opmerking

De drie vakken r.o. bij Moret kunnen op 49 manieren worden ingevuld. Hier de variant die correspondeert met onze formule.

Na 2000

In de praktijk zijn vooral van belang data uit het verleden en de nabije toekomst. Het is doelmatig – hoewel niet strikt nodig – om de eeuwcodes en weekdagcodes zo te regelen dat de eeuwcode van de lopende eeuw op 0 uitkomt. Dat is hierboven dan ook gedaan voor 1900. Bij het bereiken van het jaar 2000 zouden we de formule kunnen aanpassen door de eeuwcodes en weekdagcodes alle met 1 te verhogen: Juliaans wordt dan 19 – E, 1900 wordt 1, 2000 wordt 0, zaterdag wordt 1, enz. De maandcodes veranderen we natuurlijk niet.

Engeland en de Sovjet-Unie

De in 1582 door paus Gregorius XIII, na grondige studies van de geleerden Lilius en Clavius, afgekondigde kalenderhervorming betrof niet alleen het overslaan van bepaalde data (5 t/m 14 oktober 1582 en 29 februari 1700, 1800, 1900, 2100 enz.) maar ook de ingewikkelde kwestie van de vaststelling van de paasdatum. Sommige landen, zoals ook Holland, hebben de Gregoriaanse kalender direct in 1582 of kort erna ingevoerd, andere wilden daartoe nog niet overgaan en bleven voorlopig de Juliaanse kalender trouw. Die liep aanvankelijk 10 dagen achter bij de Gregoriaanse (5 oktober 1582 Jul. = 15 oktober 1582 Greg.), vanaf 1 maart 1700 werd dat 11 dagen, vanaf 1 maart 1800 12 dagen en vanaf 1 maart 1900 13 dagen. Gaandeweg deden in die andere landen de bezwaren van de achterlopende kalender zich meer gevoelen, met als gevolg dat toen alsnog werd besloten de overstap naar de nieuwe kalender te maken. Dat gebeurde in Engeland in 1752, in de Sovjet-Unie pas in 1918.
In Engeland werd woensdag 2 september 1752 Jul. gevolgd door donderdag 14 september 1752 Greg. waarbij dus 11 data werden overgeslagen.
In de Sovjet-Unie werd woensdag 31 januari 1918 Jul. gevolgd door donderdag 14 februari 1918 Greg. – 13 data vielen toen weg. De jaren 1700, 1800 en 1900 waren in de Juliaanse kalender immers schrikkeljaar gebleven.
De Oktoberrevolutie greep plaats op 25 oktober 1917 Jul., overeenkomende met 7 november 1917 Greg., vandaar dat die gebeurtenis niet in oktober, maar op 7 november wordt herdacht (parade Rode Plein). Voor zo'n uitgestelde Juliaanse datum gebruiken we gewoon de formule voor de Juliaanse eeuwcode. Voor 1900 is die $18 - 19 = -1$. Dus wordt 25 oktober 1917 Jul. $= 4 + 1 - 1 + 3 + 4 = 4$ = woensdag. 7 november 1917 Greg. $= 4 + 3 + 4$ = ook woensdag, natuurlijk, het is immers dezelfde dag.

Weekdag bij een gegeven datum - verklaring

Behoudens het jaar 1582 zijn alle jaren vanaf 1 maart gelijk – het stuk ervóór heeft 31 + 28 of 31 + 29 dagen.

Uit 1 maart 1900 = donderdag volgt 1 maart 1901 = vrijdag, een opschuiving van 1 dag, wegens 365 = 7-voud + 1. We schrijven dit: 1 maart 1900/1901 = 1.
Zo is ook 1 februari 1903/1904 = 1, maar 1 maart 1903/1904 = 2, wegens 29 februari 1904.
1 maart 1900/1994 = 94 + 23 = 5, waarin 23 = 94 : 4 (rest niet van belang) wegens 1904, 1908, 1912, ... 1988, 1992.

Eeuwsprongen

1 maart 100/200 = 200/300 = ... = 1300/1400 = 1400/1500 = 1900/2000 = 100 + 25 = − 1.
1 maart 1500 Jul./1600 = 100 + 25 − 10 = 3.
1 maart 1500 Greg./1600 = 100 + 25 = − 1.
1 maart 1600/1700 = 1700/1800 = 1800/1900 = 100 + 24 = − 2.
Voor 1900 nemen we de eeuwcode = 0, dan wordt de reeks van eeuwcodes:
000 = 18, 100 = 17, ... 1400 = 4, 1500 Jul. = 3, 1500 Greg. = 0, 1600 = 6, 1700 = 4, 1800 = 2, 1900 = 0, 2000 = 6 enz.
Goed onderscheiden:
1500 Jul. = 3 (1-1-1500/4-10-1582) en
1500 Greg. = 0 (15-10-1582/31-12-1599).

Maandcodes en weekdagcodes

De maandcode voor maart moet zijn = 4, dan is de weekdagcode voor donderdag = 5, want 1 maart 1900 = donderdag. Daardoor liggen ook de andere weekdagcodes vast, evenals de maandcodes, bv. april = 4 + 31 = 0, mei = 0 + 30 = 2, enz. Januari en februari krijgen elk twee maandcodes, een voor gewone jaren en een voor schrikkeljaren. Hiermede is de formule verklaard: uit het basisgegeven 1 maart 1900 = donderdag volgt elke andere datum, bv. 21 april 1794 via 1 maart 1900, 1 maart 1800, 1 maart 1700, 1 maart 1794, 1 april 1794, 21 april 1794.
Om het verhaal af te ronden geven wij nog de volgende regel, die uit het schema van Moret is af te leiden: de kalender van een gegeven gewoon jaar herhaalt zich na 6 of 11 jaar en van een schrikkeljaar na 28 jaar. Bij het passeren van de eeuwjaren 1700, 1800, 1900, 2100 enz. wordt dit echter na 6 of 12 jaar, resp. na 12 of 40 jaar.

Over de auteur:
Jac. Kieft is geboren in 1923, heeft enige jaren wis- en natuurkunde gestudeerd in Amsterdam en is daarna tot 1985 in dienst geweest van de Algemene Bank Nederland.

Boekbespreking

Werner Blum/Günter Törner, *Didaktik der Analysis*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983, 304 blz., DM 39,00.

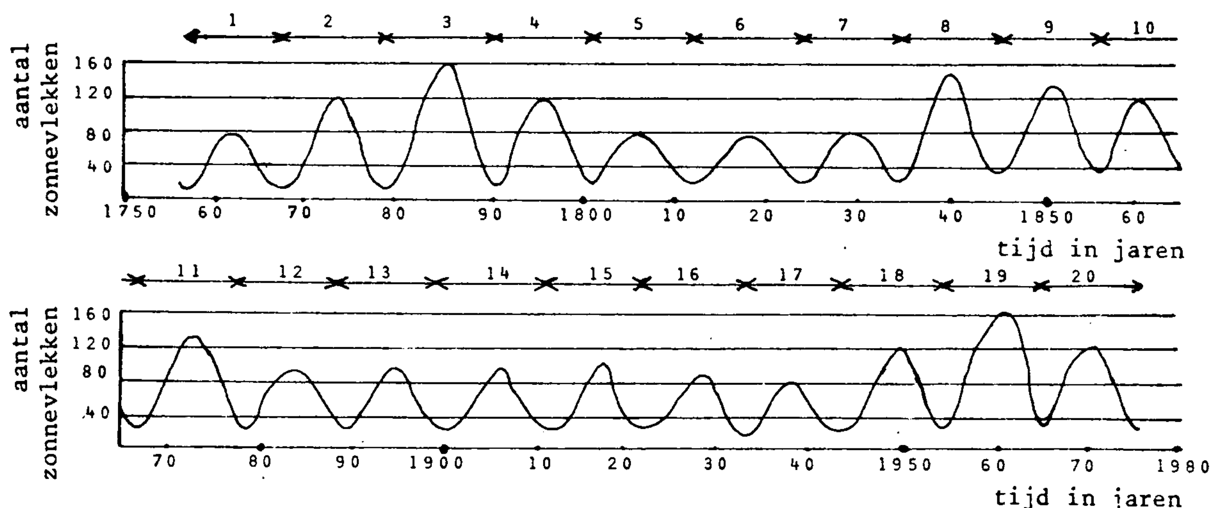
In dit boek gaat het over het onderwijs in de analyse, zoals dat gegeven wordt in de zogenaamde Sekundarstufe II van de scholen voor voortgezet onderwijs in de Bondsrepubliek. De betreffende leerstof is dus te vergelijken met de leerstof in de bovenbouw van ons vwo. Aangezien in de BRD het onderwijs grotendeels een zaak is van de deelstaten, zijn de leerplannen in de verschillende 'Länder' ook niet gelijk. De verschillen zitten vooral in de verdeling van de leerstof en het aantal uren dat beschikbaar is.
Het boek is in drie gedeelten verdeeld. In de hoofdstukken A1 t/m A8 wordt de didactiek van de leerstof besproken (reële getallen, functies, rijen, limieten, continuiteit, afgeleide functie, differentiaalrekening, integraalrekening). In hoofdstuk B1 gaat het over de geschiedenis van de didactiek van de analyse. In B2 en B3 worden enkele benaderingswijzen van de stof als geheel besproken, bij voorbeeld de 'Universitätsorientierte Konzeption': deze leidde in het begin van de 70-er jaren tot de 'Strenge-Welle' in de schoolwiskunde. In de hoofdstukken C1 t/m C7 komen wat algemene kwesties aan de orde (Genetisches Prinzip, Darstellungsebenen, Spiralprinzip, Didaktische Prinzipien, Lokales Ordnen, Anwendungsorientierung, Logik). Een literatuurlijst, een lijst van schoolboeken en een trefwoordenregister besluiten het boek.
Het boek bevat talrijke opgaven: de eerste opgave uit hoofdstuk B1 luidt: 'Vergleichen Sie die bei Inhetveen, bei Lenne und bei Schuberth genannten Gründe für die Meraner Reform'. Uit dit voorbeeld volgt al dat heel wat naslagwerken in de tekst of in de noten worden genoemd. Het aantal drukfouten is zeer gering: op blz. 20 correspondeert figuur 1 niet met de daar genoemde Fourier-rij.

Zie verder op p. 25.

Examen vwo Wiskunde A 1986 2e periode

1 Op de zon komen plaatsen met een lagere temperatuur voor: de zogenaamde zonnevlekken. Het aantal zonnevlekken varieert met de tijd. Sinds ongeveer 1700 wordt het aantal zonnevlekken met grote regelmaat geteld.

De globale grafiek van het aantal zonnevlekken sinds 1755 ziet er als volgt uit:



De geleerden zijn het erover eens dat in het voorkomen van zonnevlekken een periodiek verschijnsel is waar te nemen. De hier getekende grafiek vertoont 20 perioden.

a Verklaar dat uit deze grafiek afgeleid kan worden dat de gemiddelde periode 11 jaar is.

Sommige onderzoekers wijzen ook op het feit dat de cycli 1, 2, 3 en 4 grote overeenkomst vertonen met 17, 18, 19 en 20. Men vindt hierin een aanwijzing van een tweede periode.

b Geef het aantal jaren van deze tweede periode aan.

c Op grond van de twee perioden die bij het verschijnsel zonnevlekken zijn waargenomen, heeft men voorspellingen voor het aantal zonnevlekken in de rest van de eeuw gemaakt.
In welk jaar zal voor het eerst na 1986 het aantal zonnevlekken een maximum bereiken?
Hoe groot zal dat maximum ongeveer zijn?

Men vermoedt al jaren dat de zonnevlekken invloed hebben op het weer op aarde. De regenval in Fortaleza (Brazilië) laat zich beschrijven met het volgende wiskundige model

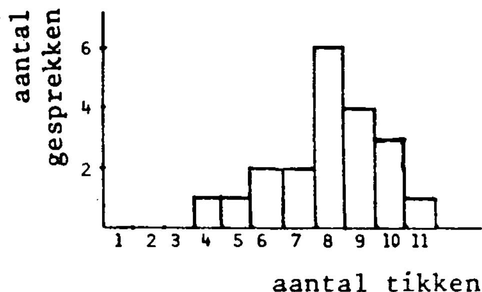
$$R = 140 + 35\sin\left(\tfrac{\pi}{11}t\right),$$

waarbij R het aantal cm regen in een bepaald jaar en t de tijd in jaren is. Het tijdstip $t = 0$ valt samen met het jaar 1905.

d Teken de grafiek van R als functie van t voor de jaren 1905-1930.

e Bereken in één decimaal nauwkeurig het aantal cm regen dat de bewoners van Fortaleza in 1986 volgens bovenstaand model kunnen verwachten.

2 Twee studenten, Annet en Wouter, hebben een kamer in hetzelfde huis. Zij maken gebruik van een telefoon die voorzien is van een kostenteller. Ze noteren in een schrift het aantal tikken per gesprek dat door de teller wordt aangegeven. Elke tik kost 15 cent. Als Annet 20 gesprekken heeft gevoerd, maakt ze de balans op van het aantal tikken per gesprek. Hiernaast is een histogram van de frequentieverdeling van het aantal tikken per gesprek getekend.



a Bereken in één decimaal nauwkeurig van deze 20 gesprekken het gemiddeld aantal tikken en de standaarddeviatie.
Uit een telling van een veel groter aantal uitgaande telefoongesprekken blijkt dat de aantallen gesprekken van Annet en Wouter zich verhouden als 2 : 3. De tijdstippen en de duur van de gesprekken van Annet en Wouter zijn onafhankelijk van elkaar.

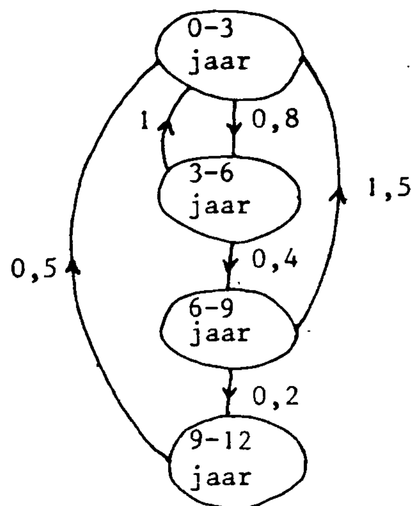
b Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat van de eerstvolgende 50 uitgaande gesprekken er meer door Annet dan door Wouter worden gevoerd.
Bovendien blijkt dat het aantal tikken per gesprek voor zowel Annet als Wouter normaal verdeeld zijn.
Het gemiddelde aantal tikken per gesprek is voor Annet 8,0 en voor Wouter 4,0. De standaarddeviatie van het aantal tikken is voor Annet 2,0 en voor Wouter 1,0.

c Het abonnement voor telefoon en randapparatuur is *f* 56,– per twee maanden.
Annet en Wouter besluiten dat hun aandeel in het abonnement evenredig moet zijn met de verwachte gesprekskosten die zij elk maken.
Hoeveel moet elk aan abonnementsgeld betalen?

d Hoeveel procent van het totaal aantal uitgaande gesprekken kost naar verwachting ten hoogste 60 cent?

3 De maximale leeftijd van een zekere diersoort is 12 jaar. Nevenstaand schema illustreert het verloop van de populatie gedurende een driejarige periode. Hieruit valt bijvoorbeeld af te leiden dat 80% van de 0-3 jarigen in de leeftijdsklasse van 3-6 jaar komt en dat de 3-6 jarigen 100% nakomelingen hebben.

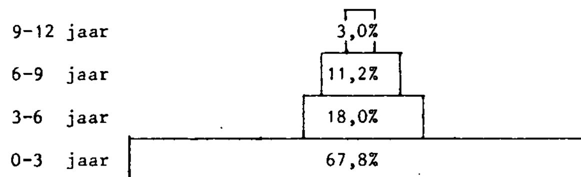
a Op zeker moment zijn er 10 000 pasgeboren dieren. Hoeveel jongen brengen die 10 000 dieren naar verwachting voort gedurende hun verdere leven?



(Nakomelingen van deze nakomelingen worden buiten beschouwing gelaten.)

b Beschrijf het verloop van de populatie met behulp van een matrix.

De hieronder getekende bevolkingspiramide geeft de relatieve verdeling van de dierpopulatie op 1 januari 1986 aan:



c Bereken in één decimaal nauwkeurig de percentages behorend bij de vier leeftijdsklassen op 1 januari 1989.
Teken de bijbehorende bevolkingspiramide.

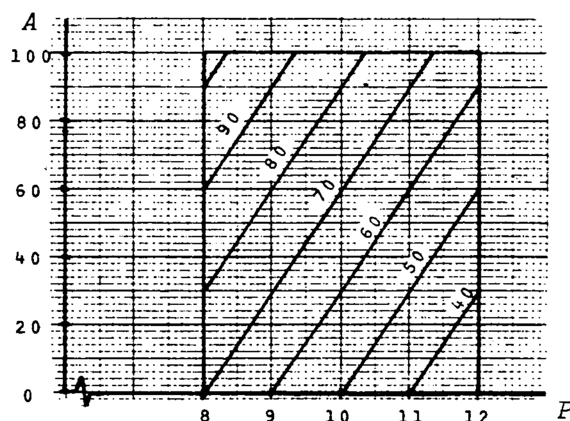
d Bereken in één decimaal nauwkeurig de percentages behorend bij de vier leeftijdsklassen op 1 januari 1983.

4 Een winkelier handelt in blikken verf, die ingekocht worden voor *f* 4,– per blik.
Per week wordt een bepaald aantal blikken verkocht. Het totale verkoopbedrag van die blikken, verminderd met het totale inkoopbedrag ervan, noemt men de brutowinst van die week.
Bij een verkoopprijs van *f* 10,– per blik worden wekelijks 50 blikken verf verkocht.
De winkelier neemt aan dat een grotere brutowinst

per week te behalen is door de verkoopprijs te veranderen. Het blijkt dat bij elke 10 cent prijsverlaging het aantal wekelijks verkochte blikken met één toeneemt.

a Bereken de verkoopprijs in het geval dat de brutowinst per week maximaal is.

Behalve door prijsverlaging kan de omzet ook vergroot worden door het maken van reclame. De winkelier wil niet meer dan ƒ100,– per week aan reclame uitgeven. Het aantal per week verkochte blikken wordt met Q aangeduid. Q is nu een functie van de verkoopprijs P per blik en de wekelijkse reclamekosten A.
In onderstaande figuur zijn de niveaulijnen voor $Q = 40, Q = 50, \ldots, Q = 100$ getekend, voor $8 \leqq P \leqq 12$ en $0 \leqq A \leqq 100$.



b De winkelier besluit ƒ50,– per week aan reclame uit te geven. Hoe moet hij de verkoopprijs kiezen om 60 blikken verf te kunnen verkopen?
Bereken in dat geval de brutowinst per week verminderd met de wekelijkse reclamekosten.

c Bij een verkoopprijs van ƒ10,– per blik en een geschikte keuze van het reclamebedrag kunnen 70 blikken verkocht worden. De winkelier overweegt de verkoopprijs met ƒ1,– te verhogen. Bereken het bedrag dat hij extra aan reclame moet uitgeven om hetzelfde aantal van 70 blikken te kunnen verkopen. Bereken het bedrag waarmee de brutowinst, verminderd met de reclamekosten, in dat geval verandert.

d Bij een vaste verkoopprijs van ƒ10,– is Q een functie van A. Druk Q uit in A.

Antwoordmodel (normen)

	punten		
1a	3		
b	3	voor het antwoord 176 jaar	3
c	6	voor het jaar 1993	3
		voor het maximum 80	3
d	5	voor de randpunten (0, 140) en (25, 166)	1
		voor de extremen $(5\frac{1}{2}, 175)$ en $(16\frac{1}{2}, 105)$	2
		voor de tekening	2
e	5	voor $R = 140 + 35\sin(\frac{\pi}{11} \cdot 15)$	2
		voor het antwoord 108,2 cm	3
2a	6	voor het gemiddelde 8,0	3
		voor de standaarddeviatie 1,7	3
b	4	voor het inzicht dat de binomiale kansverdeling voor $n = 50$ gebruikt moet worden	1
		voor $P(x > 25 \mid p = 0{,}4 \wedge n = 50) = 1 - P(x \leqq 25 \mid p = 0{,}4 \wedge n = 50)$	2
		voor het antwoord 0,0573	1
c	5	voor de verhouding van de gespreksk osten van Annet en Wouter is 4 : 3	3
		voor Annet betaalt ƒ32,– en Wouter ƒ24,–	elk 1
d	8	voor er mogen ten hoogste 4 tikken per gesprek zijn	1
		voor Annet: $\varnothing\left(\frac{4{,}5 - 8}{2}\right) = \varnothing(-1{,}75)$	1
		voor $\varnothing(-1{,}75) = 0{,}0401$	1
		voor Annet: $0{,}4 \cdot 0{,}0401 \approx 1{,}6\%$	1
		voor Wouter: $\varnothing\left(\frac{4{,}5 - 4}{1}\right) = \varnothing(0{,}5)$	1
		voor $\varnothing(0{,}5) = 0{,}6915$	1
		voor Wouter: $0{,}6 \cdot 0{,}6915 \approx 41{,}5\%$	1
		voor het antwoord 43 %	1
3a	5	voor de 3-6 jarigen brengen 8000 nakomelingen voort	2
		voor de 6-9 jarigen brengen 4800 nakomelingen voort	1
		voor de 9-12 jarigen brengen 320 nakomelingen voort	1
		voor het antwoord 13120	1
b	6	voor de eerste rij: 0 1 1,5 0,5	3
		voor de tweede rij: 0,8 0 0 0	1
		voor de derde rij: 0 0,4 0 0	1
		voor de vierde rij: 0 0 0,2 0	1
c	7	voor de 0-3 jarigen 36,3 %	1
		voor de 3-6 jarigen 54,2 %	1
		voor de 6-9 jarigen 7,2 %	1
		voor de 9-12 jarigen 2,2 %	1
		voor de tekening	3
d	5	voor de 0-3 jarigen 22,5 %	1
		voor de 3-6 jarigen 28,0 %	1
		voor de 6-9 jarigen 15,0 %	1
		voor de 9-12 jarigen 34,6 %	2

4a	9	voor de keuze dat er 50 + a blikken worden verkocht	1
		voor de verkoopprijs per blik is $10 - 0{,}1a$	2
		voor de totale verkoop is $-0{,}1a^2 + 5a + 500$ gulden	1
		voor de inkoop is $4a + 200$ gulden	1
		voor de winst is $-0{,}1a^2 + a + 300$ gulden	1
		voor de winst is maximaal voor $a = 5$	2
		voor de verkoopprijs per blik is ƒ9,50	1
b	4	voor de verkoopprijs per blik is ƒ10,70	2
		voor de brutowinst verminderd met reclamekosten is ƒ352,–	2
c	5	voor een verkoopprijs van ƒ10,– is het reclamebedrag ƒ60,–	1
		voor een verkoopprijs van ƒ11,– is het reclamebedrag ƒ90,–	1
		voor het extra reclamebedrag is ƒ30,–	1
		voor de brutowinst neemt met ƒ40,– toe	2
d	4	voor $Q = \frac{1}{3}A + 50$	4

Vervolg boekbespreking van p. 21.

Het boek is ontstaan uit colleges die de schrijvers gaven aan verschillende universiteiten en uit de praktijk van nascholingscursussen voor wiskundeleraren. Ook voor Nederlandse wiskundedocenten is de lezing van dit boek zeker interessant en voor docenten die betrokken zijn bij de opleiding tot wiskundeleraar is het boek bovendien ook nog een waardevol hulpmiddel bij de opleiding.
Van de vele voetnoten wil ik de laatste noemen, voorkomend in het hoofdstuk Logica (dit hoofdstuk begint met de volgende definitie uit het al genoemde boek van Freudenthal: 'Logik nennen wir es, wenn wir unser Denken zum Gegenstand unseres Denkens machen'): z.B. Wode (1971): 'Ein Eheinstitut heiszt erfolgreich ('stetig'), wenn es zu jedem noch so unsympatischen Ehewilligen einen Partner so findet, dasz alle Bekannten des Partners dem Eheinstitut gratulieren .

G. M. Hogeweij

Leerconcepties en wiskunde B

E. M. Koerts, E. J. van Rossum

Het idee om studieproblemen te bekijken vanuit het perspectief van de leerling is in Nederland geïntroduceerd door Van Rossum[1]. Wiskunderesultaten worden meestal verklaard vanuit factoren die binnen het psychometrische model passen: intelligentie, geslacht, leerstijl, e.d. Ook bij het invoeren van de ruimtemeetkunde hoor je opnieuw het argument 'je ziet het, of je ziet het niet'.
De stelling van Van Rossum is, dat studieprestaties misschien ook, of zelfs beter, verklaard kunnen worden vanuit de opvattingen die docenten en leerlingen hebben over het leerproces[2]. Op basis van deze hypothese is inmiddels onderzoek gedaan o.a. onder psychologie- en letterenstudenten. Koerts[3] heeft deze hypothese gebruikt bij onderzoek onder wiskunde-B-leerlingen (5 en 6 vwo). Uit zijn onderzoeksverslag willen we hier enkele stukken citeren.
Wij denken dat leerlingen met een deels zelf geconstrueerde werkelijkheidsopvatting tegen het gegeven onderwijs aankijken en dat interpreteren. Wij zullen enkele voorbeelden uit de eigen onderzoeks- en leservaring geven.

De wiskundeleraar behandelt een bepaald onderwerp in 5 vwo (differentieerbaarheid). Hij vraagt na afloop van de lessenserie aan de leerlingen om op te schrijven wat de bedoeling van de gegeven lessen was. Afwijkend van de opvatting en de bedoeling van de leraar en vele andere leerlingen schrijft Jenny:
'Wat is de bedoeling van de leraar met het onderwerp differentieerbaarheid? Antwoord: Ons wegwijs maken met het begrip differentieerbaarheid. Laten zien wanneer een functie differentieerbaar is

en wanneer niet en *er later sommen mee gaan maken* om de theorie toe te passen.

Wel, dat was *niet* de bedoeling van de leraar. Het wegwijs maken met het begrip was al in een veel vroeger stadium gebeurd en bovendien had hij aangekondigd dat er geen 'drill-and-practice' zou volgen. Ter vergelijking het antwoord van een andere leerling (Daphne):
We hebben tot nu toe gedifferentieerd volgens een maniertje. We gebruikten een ezelsbruggetje en dan 'rolde' het antwoord er (gewoon) uit. In deze afgelopen weken zijn we aan die differentieerbaarheid gaan twijfelen. We zijn toen teruggevallen op de basis van de wiskunde. We hebben de differentieerbaarheid toen gekoppeld aan limieten. Bij alles konden we onze twijfels zetten, we maakten alles 'stuk' en kwamen dan terecht op de basis. Van daaruit konden we dan alles opbouwen en tot een goede eindconclusie komen. De basis waarmee we werkten was $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
Ik denk dat de bedoeling van het aansnijden van dit onderwerp was: ons zelf laten ontdekken dat de wiskunde een basis heeft waarop we terug kunnen vallen. Dat wiskunde niet is allerlei trucjes leren en deze dan zo goed mogelijk toepassen, maar dat wiskunde is zelf inzien dat we werken met dingen die we zelf ontdekken.

We denken dat bijvoorbeeld Jenny met een zelf geconstrueerde werkelijkheidsopvatting tegen het gegeven onderwijs aankijkt. Welke zou deze kunnen zijn? Haar wordt gevraagd op te schrijven welke opvatting van leren zij heeft. Zij schrijft:
Mijn standpunt over leren. Bij sommige vakken gewoon een beetje stampen, uit je hoofd leren. Bij wis-, natuur- en scheikunde speelt inzicht hebben een grotere rol. Een klein stukje theorie en daarna toepasbare problemen oplossen. Het leren van deze vakken is voor mij eerst de theorie doorgronden en dan *zoveel mogelijk sommen maken* om routine te krijgen en leren hoe we bepaalde problemen aan moeten pakken.
Haar leerconceptie - een stukje werkelijkheidsvoorstelling - is een transparant waardoor zij tegen het gegeven onderwijs aankijkt.
We werken deze hypothese nog wat verder uit. Hoe moet bijv. goed wiskundeonderwijs er uit zien? Welke verwachtingen hebben leerlingen daarvan? We denken dat deze samenhangen met de leerconceptie. Jenny schrijft:
Hoe moet goed wiskundeonderwijs er uit zien? Zo goed mogelijk voorbereiden op het examen. De wiskunde die we nu leren moet zoveel mogelijk *bruikbaar* zijn bij vervolgonderwijs.

Jenny vat leren op als zoveel mogelijk sommen maken: zij denkt dat de leraar dat met zijn onderwijs ook bedoelt (zie boven) en nu blijkt dat zij ook verwacht dat het onderwijs toepassingsgericht is.
Hoe zou zij haar proefwerken voorbereiden? We verwachten dat zij zoveel mogelijk de gemaakte sommen zal herhalen en misschien nog andere sommen gaat maken. De klas werd gevraagd op te schrijven hoe zij hun proefwerken hebben voorbereid. Uit haar antwoord blijkt dat Jenny de nadruk legt op veel informatie verzamelen, hard werken en veel oefenen. Zij schrijft:
Voorbereiding proefwerk.
Ik heb geprobeerd altijd mijn huiswerk te doen, en mijn schrift netjes bij te houden. Op de dag van het proefwerk zelf heb ik eerst de stof helemaal bekeken en daarna in verschillende onderdeeltjes onderverdeeld (limieten bewijzen, grafieken tekenen, asymptoten bewijzen en berekenen, rekenregels afleiden). Van ieder onderdeel heb ik één som gemaakt en de rest van de sommen bekeken of ik die ook snapte: zo niet, dan heb ik de sommen die ik niet snapte ook uitgewerkt. Verder heb ik nog wat algemene regeltjes uit de vorige stof herhaald, alles bij elkaar ben ik ± 2 uur bezig geweest (en de repetitie nog slecht gemaakt!).
Laten we haar antwoorden eens vergelijken met die van Daphne. Uit het eerder vermelde citaat blijkt dat Daphne denkt dat de bedoeling van de leraar is om al zelf ontdekkend wiskunde te begrijpen en niet een verzameling trucjes te memoriseren. Dit strookt geheel met haar verwachtingen omtrent goed wiskundeonderwijs. Zij schrijft:

Hoe ziet goed wiskundeonderwijs er voor mij uit? Goede, begrijpelijke uitleg, maar niet alles precies voorgekauwd krijgen. Je moet in de wiskunde ook zelf dingen kunnen ontdekken. Je moet bij dit ontdekken natuurlijk wel geholpen en gestuurd worden. Ook vind ik dat er in de wiskunde prak-

tijkvoorbeelden moeten zitten. Je moet je ook verder kunnen vormen en met elkaar tot iets kunnen komen (met elkaar problemen oplossen).

Zij verwacht activerend (= ontwikkelend[4]) onderwijs, waarbij de docent op de achtergrond sturend optreedt. Ook stelt zij samenwerking met andere leerlingen op prijs. Zij oogt veel zelfstandiger dan Jenny en is minder angstig. Zij verwacht creatiever onderwijs en wil zelf ook creatief zijn[5]. Dat klopt als we kijken naar wat zij opschrijft bij de proefwerkvoorbereiding:
Hoe leerde ik mijn wiskunde-B repetitie?
Ik heb mijn repetitie voorbereid door eerst alle standaardafgeleiden en standaardlimieten *op een rijtje* te zetten. Daarna heb ik alle gemaakte sommen bestudeerd en de problemen *vergeleken*. Nadat ik dit alles goed in mijn hoofd had geprent ben ik sommen gaan maken en *zelf 'standaards' gaan afleiden*. Na een aantal sommen ging ik naar bed. 's Ochtends nog even alle standaardgegevens *in mijn hoofd gepompt* en 'that was it!'.

Haar creativiteit blijkt uit het feit dat ze met de stof iets gaat doen (zelf afleiden) en dat ze een eigen studiestrategie heeft. Ze gaat niet zomaar rekenen, maar kijkt eerst wat ze al heeft. Deze gegevens zet ze op een rijtje (sorteren) en past die toe op sommen. Noodzakelijke dingen prent ze in, maar pas zodra dat nuttig blijkt te zijn.
Ze heeft dus een strategie van sorteren – toepassen – inprenten indien nodig en – daar komt de slimme student – 's morgens nog even de reproduktie. Haar gedrag lijkt meer op dat van een expert dan van een novice[6] en staat metacognitief gezien op een hoger niveau. Het zal ons niet verbazen wanneer zij in haar leerconceptie niet de nadruk legt op hard werken en veel informatie verzamelen, maar op begrijpen en inzicht in het vak. Dit klopt aardig met wat zij formuleert:
Het leren hangt heel erg van het vak af. Bij vakken zoals Engels, Duits, Frans, bio, aardrijkskunde en geschiedenis, kun je 'stampen'.
Bij exacte vakken is het niet echt een kwestie van 'leren', *maar meer van begrijpen*. Voor een repetitie van een exact vak, ben je dus ook *niet zo lang bezig*, als je *alle sommen snapt*, in de lessen goedt hebt opgelet *en je het vak begrijpt*.
Daarom vind ik een repetitie voor een exact vak ook iets heel vreemds en het cijfer zegt niet veel over je *inzicht*, of hoe snel je iets door had.

Het blijkt dus dat het op zijn minst aannemelijk is, dat verschillen in leerconcepties zullen samengaan met verschillen in verwachting, waarnemen en handelen. Verschillen in werkelijkheidsvoorstellingen, hier beperkt tot verschillen in leerconcepties, leiden tot verschillen in handelen, etc. Mensen definiëren en interpreteren hun situatie en dus ook hun leersituatie. Dat is óns cognitieve standpunt. Ook het wiskundig handelen speelt zich af o.a. op basis van de betekenis die actoren verlenen aan hun ervaringen. Dat dit ook consequenties heeft voor de leerresultaten laat zich niet moeilijk raden.

Literatuur

1 Rossum, E. J. van en Schenk, S. M. (1983), De relatie tussen leerconceptie, studiestrategie en leerresultaat, *Pedagogische Studiën*, 60, 252-262.
2 Rossum, E. J. van (1984), *Arithmetic and Mathematics Education – as a phenomenon and/or problem of communication*, Paper gepresenteerd op het 8ste P.M.E. congres, Sydney, Australië.
3 Koerts, E. M. (1986), *Van buiten leren van binnen kennen*, Doctoraalscriptie Onderwijskunde, Tilburg: K.H.T.
4 Parreren, C. F. van (1982), Richtlijnen voor ontwikkelend onderwijs. In: E. De Corte (ed.), *Onderzoek van onderwijsleerprocessen: stromingen en actuele thema's*. S.V.O.-reeks nr. 53, blz. 134-144.
5 Rossum, E. J. van en Deijkers, R. (1984), *Students' Conceptions of Learning and good Teaching*, Paper gepresenteerd op de 10de I.U.T. conferentie, Universiteit van Maryland University College, U.S.A.
6 Elshout, J. J. (1984), *Een goed begin is het halve werk: over determinanten van effectief beginnersgedrag*, In: Mönks, F. J. en Span, P. (Eds.), *Hoogbegaafden in de samenleving*. Nijmegen: Dekker & van de Vegt.

Over de auteurs:

E. M. Koerts is wiskundeleraar te Waalwijk en studeerde onderwijspsychologie en -sociologie aan de Katholieke Hogeschool te Tilburg.
E. J. van Rossum was tot 1 april 1986 als onderwijspsycholoog verbonden aan de Katholieke Hogeschool Tilburg. Sedert 1 april 1986 werkt hij als onderzoeker en onderwijsevaluator aan de Hogere Hotelschool te Den Haag.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

545 In de tweede ronde van de Nederlandse olympiade 1984 kwam, behoudens een kleine wijziging, het volgende vraagstuk voor.
Door haakjes in 1 : 2 : 3 te zetten, kunnen we verschillende breuken krijgen, namelijk

$$(1:2):3 = \frac{1}{2 \cdot 3} \text{ en } 1:(2:3) = \frac{1 \cdot 3}{2}$$

Zet nu de haakjes in 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8. Hoeveel verschillende breuken kunnen we daardoor krijgen? De breuken hoeven niet numeriek verschillend te zijn.
Ik voeg hier de volgende twee vragen aan toe.

a Op hoeveel manieren kunnen we de zakjes plaatsen in 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8?

b Blijkbaar op meer manieren dan er verschillende breuken zijn. Dat geeft te denken. Sommige breuken kunnen dus op verschillende manieren met haakjes geschreven worden.
Schrijf $\frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 5 \cdot 6}$ op alle mogelijke manieren met haakjes.

546 Gegeven zijn n punten in het platte vlak die niet op één rechte lijn liggen. Is het mogelijk ze te verbinden door een gesloten gebroken lijn waarvan geen twee niet-opeenvolgende lijnstukken een punt gemeen hebben? Elk lijnstuk heeft als uiteinden twee van de n punten.

547 R. Pelsmaeckers stelde in zijn voordracht op de jaarvergadering van de VVWL in maart 1983 te Diepenbeek het volgende probleem. Beschouw de lineaire ornamenten waarvoor een kleinste translatie t bestaat die het ornament in zichzelf doet overgaan. Behalve t zijn er de volgende mogelijkheden om het ornament in zichzelf te doen overgaan:
een spiegeling in de lijn l van het ornament (die dus de richting van t heeft)
een spiegeling in een lijn loodrecht op l
een puntspiegeling
een schuifspiegeling ss waarvoor geldt $ss^2 = t$.
Geef een klassifikatie van de mogelijkheden die gerealiseerd kunnen worden.
(Wie dit probleem oplost, merkt vanzelf waarom de beperking $ss^2 = t$ toegevoegd is.)

Oplossingen

542 Een boek van 200 bladzijden bestaat uit 20 novellen. Elke novelle neemt een geheel aantal bladzijden in beslag. A wedt dat er meer novellen een aantal bladzijden groter dan 10 dan kleiner dan 10 hebben, B dat er juist meer novellen zijn met minder dan meer dan 10 zijn. Wie heeft de beste winstkansen?
We nemen aan dat elke mogelijke verdeling $a_1, a_2, ..., a_{20}$ van de lengten van de novellen even waarschijnlijk is.
Neem eerst aan dat alle novellen minder dan 20 bladzijden beslaan. Als $a_1, a_2, ..., a_{20}$ een dergelijke verdeling is, dan is $20 - a_1, 20 - a_2, ..., 20 - a_{20}$ er ook een. Als bij de eerste het aantal bladzijden groter dan 10 gelijk is aan p en kleiner dan 10 aan q, dan is dit bij de tweede verdeling juist omgekeerd. Beperken we ons dus tot verdelingen waarvan alle novellen korter zijn dan 20 bladzijden, dan zijn de kansen op meer boven de 10 en meer onder de 10 gelijk.
Neem nu aan dat hoogstens 1 novelle 20 bladzijden heeft en de andere minder dan 20. Beschouw weer de verdelingen $a_1, a_2, ..., a_{20}$ en $20 - a_1, 20 - a_2, ..., 20 - a_{20}$. Weer is in totaal de kans op meer boven de 10 gelijk aan die op meer onder de 10. Maar ditmaal zijn er verdelingen van de tweede soort die onbestaanbaar zijn, namelijk die waar een 0 in voorkomt. Ik beweer dat deze gemiddeld meer novellen boven de 10 dan onder de 10 bevatten.
De verdeling waar een 0 in voorkomt, bestaat uit 19 novellen met elk minder dan 20 bladzijden die samen 200 bladzijden beslaan. Zouden we 99 novellen beschouwen die elk minder dan 20 bladzijden hebben en samen 190 bladzijden hebben, dan zou de kans op meer boven de 10 gelijk zijn aan die op meer onder de 10. Nu ze samen nog 20 bladzijden meer hebben, zal er een verschuiving plaats hebben naar langere novellen en zal de kans op meer boven de 10 dus groter zijn dan de kans op meer onder de 10.
De onmogelijke verdelingen hebben gemiddeld meer novellen boven dan onder de 10. Mogelijke en omogelijke verdelingen samen geven gelijke kansen. De mogelijk verdelingen hebben dus gemiddeld meer novellen onder de 10.
Als er meer novellen zijn met 20 bladzijden of als er novellen zijn met meer dan 20 bladzijden, wordt dit effect nog versterkt. B heeft dus de beste winstkansen.
(De redenering is niet volkomen streng. Als iemand een waterdichte oplossing vindt, houd ik mij aanbevolen.)

543 Op hoeveel manieren kan men een verzameling van n elementen in deelverzamelingen verdelen? Anders geformuleerd: hoeveel rijen $a_1, a_2, ..., a_k$ hebben de eigenschap dat $a_1 \geqq a_2 \geqq ... \geqq a_k > 0$ en $a_1 + a_2 + ... + a_k = n$?
Noem dit aantal p_n. We willen een recursief proces ontwerpen om p_n, en in het bijzonder p_{16}, te berekenen.
Als we een verzameling van 16 elementen willen verdelen, kunnen we beginnen met 1, 2, 3, ..., 16 elementen te kiezen. Het aantal verdelingen dat we dan kunnen krijgen, noteren we resp. $p_{16.1}, p_{16.2}, p_{16.3}, ..., p_{16.16}$.
Beginnen we met bijv. 3 elementen te kiezen, dan houden we er 13 over. Deze kunnen we verder verdelen, maar daarbij moeten we beginnen met het kiezen van minstens 3 elementen.
Zo komen we tot de volgende formules:

$p_{16.1} = p_{15.1} + p_{15.2} + ... + p_{15.15}$
$p_{16.2} = p_{14.2} + p_{14.3} + ... + p_{14.14}$
...
$p_{16.7} = p_{9.7} + p_{9.8} + p_{9.9}$
$p_{16.8} = p_{8.8}$
$p_{16.9} = p_{16.10} = ... = p_{16.15} = 0$
$p_{16.16} = 1$

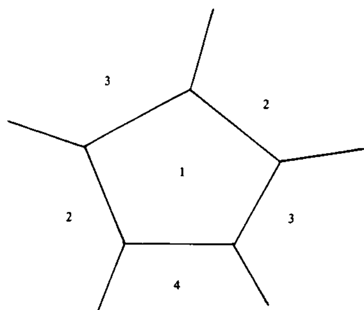
In het onderstaande schema staan de waarden voor p_{kl} die we op deze manier vinden. In de laatste kolom staan de door optelling verkregen waarden voor p_k.

p_{kl} k \ l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	p_k
1	1																1
2	1	1															2
3	2	0	1														3
4	3	1	0	1													5
5	5	1	0	0	1												7
6	7	2	1	0	0	1											11
7	11	2	1	0	0	0	1										15
8	15	4	1	1	0	0	0	1									22
9	22	4	2	1	0	0	0	0	1								30
10	30	7	2	1	1	0	0	0	0	1							42
11	42	8	3	1	1	0	0	0	0	0	1						56
12	56	12	4	2	1	1	0	0	0	0	0	1					77
13	77	14	5	2	1	1	0	0	0	0	0	0	1				101
14	101	21	6	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1			135
15	135	24	9	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1		176
16	176	34	10	5	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	231

Schema oplossing 000

Waarmee we gevonden hebben dat $p_{16} = 231$.
De berekening kan nog iets verkort worden door op te merken dat bijv. $p_{16.4} = p_{15.3} - p_{12.3}$.
Wie de smaak te pakken heeft gekregen, kan nog proberen een recursief proces op te stellen om te vinden op hoeveel manieren we een verzameling van 16 elementen kunnen verdelen in 1, 2, 3, ..., 16 delen.

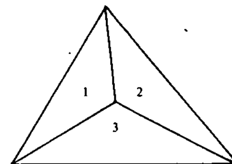
544 a Een vlakverdeling bestaat uit veelhoeken waarvan er in elk hoekpunt drie samenkomen. We kleuren de vlakken zo dat aangrenzende vlakken verschillende kleur krijgen. Kunnen we steeds volstaan met drie kleuren of zijn er soms vier nodig? Hieronder een voorbeeld waarbij vier kleuren vereist zijn.



b De vlakverdeling bestaat uit driehoeken. We bouwen de verdeling op. Elke nieuwe driehoek grenst daarbij aan hoogstens twee reeds aanwezige driehoeken. Gebruik de kleuren a, b en c. Hebben deze twee driehoeken de kleuren a en b, dan geven we de nieuwe driehoek kleur c. We kunnen dus met deze drie kleuren volstaan.
We moeten er bij de opbouw wel voor zorgen dat geen gaten overblijven. Dan zou een driehoek kunnen grenzen aan drie reeds aanwezige driehoeken. We kunnen dit voorkomen door ergens te beginnen en dan spiraalsgewijs naar buiten te werken.

---

c Nu de reguliere triangulaties waarbij in elk hoekpunt n zijden samenkomen. Onderstel de vlakverdeling heeft p hoekpunten op de buitenomtrek en q daarbinnen. Dan is
de som van alle hoeken gelijk aan $(p - 2)\,180° + q \cdot 360°$.
Dus is
het aantal driehoeken gelijk aan $p - 2 + 2q$.
Maar ook is
het aantal driehoeken gelijk aan $\dfrac{(n-1)p + nq}{n}$.
Hieruit volgt:
$$p - 2 + 2q = \frac{(n-1)p + nq}{n}$$
$p + nq = 2n$
Voor $n = 3$ geeft dit
$p + 3q = 6$
met als enige mogelijkheid $p = 3$ en $q = 1$. Dit geeft de volgende figuur, waarbij drie kleuren vereist zijn.



Algemeen is in $p + nq = 2n$ het getal p deelbaar door n. Waaruit volgt dat alleen mogelijk is $p = n$, $q = 1$.
Voor $n > 3$ blijkt deze mogelijkheid niet realiseerbaar te zijn. In het bijzonder zijn er dus geen reguliere triangulaties van de orde 5. Dus is de uitspraak:
bij elke reguliere triangulatie van de orde 5 kunnen we volstaan met twee kleuren een juiste uitspraak.
Ik hoop dat u mij mijn poging u te misleiden wilt vergeven.

Jaarvergadering/studiedag 1986

Tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag op 25 oktober 1986 in het gebouw van de SOL., Archimedeslaan 16 te Utrecht.
Aanvang 10.00 h

Agenda
9.30 h – 10.00 h Aankomst, koffie
10.00 h – 10.30 h *Huishoudelijk gedeelte:*

a. Opening door de voorzitter dr. Th. J. Korthagen.
b. Notulen van de jaarvergadering 1985 (Euclides jg. 61, nr.7).
c. Jaarverslag (zie Euclides).
d. Decharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie. Het bestuur stelt kandidaat: mw. N. B. Sies en de heer L. A. G. M. Muskens.
e. Bestuursverkiezing in verband met het aftreden van dr. J. van Dormolen, C. Th. J. Hoogsteder, M. Kindt, F. J. Mahieu en mw. drs. N. C. Verhoef. Het bestuur stelt kandidaat: mw. A. F. S. Aukema-Schepel, C. Th. J. Hoogsteder, L. Jacobs, M. Kindt, F. J. Mahieu.
f. Vaststelling van de contributie 1987/1988. Het bestuur stelt voor de contributie vast te stellen op *f* 55,– (*f* 37,50 en *f* 30,–).
g. Voorstel tot wijziging van de statuten en het huishoudelijk reglement.
Het bestuur stelt voor in artikel 8, lid 2 van de statuten de zin 'Tot veertien dagen voor de vergadering kunnen eveneens personen schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden'. Te wijzigen in 'Tot veertien dagen na het verschijnen van de eerste oproep voor de vergadering kunnen eveneens personen schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door tenminste vijf leden.'.
Het bestuur stelt voor artikel 5 van het huishoudelijk reglement 'oproeping' te vervangen door 'eerste oproeping'.
Toelichting:
Door deze wijziging wordt het mogelijk reeds voor de zomervakantie een eerste oproep voor de jaarvergadering in Euclides te plaatsen, waarna eventuele tegenkandidaten zo tijdig moeten zijn ingediend dat het mogelijk is deze via Euclides aan de leden bekend te maken. Binnen de nu nog geldende regeling is het zeer moeilijk om aan artikel 4 van het huishoudelijk reglement (Indien, ingevolge artikel 8 van de statuten, tegenkandidaten zijn ingediend, geeft het bestuur daarvan tenminste een week voor de algemene ledenvergadering kennis aan de leden) te voldoen. Bovendien leidt een extra brief aan alle leden tot zeer grote kosten.[1])

10.30 h – 16.30 h *Themagedeelte:*
10.30 h – 10.45 h Inleiding, organisatie
10.45 h – 11.00 h Pauze, koffie
11.00 h – 12.30 h Werkgroepen
12.30 h – 13.30 h Lunch
13.30 h – 14.45 h Forum
14.45 h – 15.00 h Pauze, thee
15.00 h – 16.30 h Werkgroepen
16.30 h – 17.00 h *Huishoudelijk gedeelte:*

h. Rondvraag
i. Sluiting.

Aanmelding:

De studiedag is gratis voor leden. Niet-leden zijn welkom. Van hen wordt een bijdrage van *f* 15,– gevraagd. Deelnemers aan de studiedag krijgen van tevoren inhoudelijke informatie toegestuurd.
Aanmelding kan geschieden door middel van:

* een briefkaart;
* overmaking van *f* 15,– naar giro 143917, t.n.v. N.V.v.W. Amsterdam, onder vermelding van 'lunch lid';
* overmaking van *f* 15,–, onder vermelding van 'deelnemer, niet-lid';
* overmaking van *f* 30,–, onder vermelding van 'lunch niet-lid'.

Men kan zich ook ter plaatse aanmelden. De prijzen zijn dan *f* 5,– hoger.

Inhoud van het themagedeelte

Het onderwerp van de studiedag is:
Wiskunde 12-16.
Door middel van werkgroepen en een forum worden de deelnemers geïnformeerd en kunnen ze hun mening geven over zaken die te maken hebben met het beleid en de dagelijkse praktijk van de onderbouw wiskunde havo/vwo en de wiskunde op mavo/lbo.

De werkgroepen
In de werkgroepen worden enkele specifieke aspekten van het onderbouwprogramma aan de orde gesteld. Iedere werkgroep duurt anderhalf uur en wordt twee keer aangeboden. De werkgroepen zijn:

1 Longitudinale planning van het reken- en wiskunde-onderwijs. In het rapport 'Longitudinale planning van het reken- en wiskunde-onderwijs in Nederland' worden een aantal knelpunten en oplossingen daarvan aangereikt met betrekking tot de aansluiting tussen basisschool en voortgezet onderwijs. Eén van die knelpunten is het rekenen in de onderbouw. Het lijkt wel of leerlingen steeds slechter kunnen rekenen als ze naar het voortgezet onderwijs gaan. Vanuit de tegenstelling mechanistisch-realistisch wiskunde-onderwijs wordt een aantal lijnen in de wiskunde-leerstof basisschool-onderbouw-bovenbouw aan de orde gesteld. Het werken in een praktikum geeft een kennismaking met de in het rapport genoemde knelpunten, die het begin vormt voor een afsluitende discussie.

2 Toepassingen van wiskunde in de onderbouwprogramma's. Toepassingen van de schoolwiskunde in de onderbouw zijn om een aantal redenen van belang:
- Het wiskundeonderwijs wordt meer en meer gelegitimeerd met het argument dat wiskunde overal 'gebruikt' wordt, dus horen leerlingen daar ook iets van te merken, ook in de 'onderbouw'.
- Door toepassingen te geven kunnen leerlingen zelf het nut van wiskunde ervaren.
- De ontwikkelingen rond HEWET en Hawex maken een aanpassing van het onderbouwprogramma noodzakelijk.

Er wordt gewerkt aan voorbeelden, er worden beschouwende vragen gesteld en er is een discussie.

3 De DRIE-D-show
Meetkunde en vooral ruimtemeetkunde hoort in de bagage van elke leerling thuis. In de DRIE-D-show wordt gewerkt aan een aantal meetkundige problemen: een ruimtelijk meetkundepraktikum met ruimtelijke voorwerpen. Op deze manier kunnen de deelnemers ervaren dat 'echte' ruimtemeetkunde niet triviaal is en dat er voor iedere 12-16+er nog van alles aan te beleven en te leren valt. Het is een kwestie van Denken, van Durven en van Doen.

4 Algebra anders?
In de ideeën van een onderbouwprogramma voor de leerlingen van 12-16 jaar is de plaats van de algebra, het letterrekenen, een steeds terugkerend discussiepunt. Moeten leerlingen van mavo/lbo in de eerste jaren iets aan algebra doen? Zo ja, wat, hoe en waarom? In de werkgroep wordt uitvoerig aandacht besteed aan leerlingmateriaal dat een mogelijk alternatief kan vormen voor de algebra in de eerste fase van de onderbouw. Mogelijk worden er enkele computerprogramma's gepresenteerd die bij het materiaal zijn geschreven.

5 Rekenen van 10 tot 16.
Aan de hand van opdrachten uit het pakketje 'Onder nul' worden de deelnemers geconfronteerd met herkenbare problemen op het gebied van de didaktiek van de negatieve getallen. De discussie zal worden toegespitst op de volgende problemen:
- Doordat leerlingen rekenend al snel de zeer eenvoudige rekenregels (min keer min is plus e.d.) doorkrijgen is de rest van de leergang (tot aan wiskundige toepassingen) voor hen verloren. Ze kiezen dan als het ware voor een sluiproute naar het succes op het volgende proefwerk.
- Door zijn abstraktie kan de wiskunde vele werkelijkheden beschrijven en dat idee zouden de kinderen ook van wiskunde moeten krijgen. Helaas, kinderen kiezen veelal één wereldje eruit, n.l. dat wereldje dat de beste steun biedt bij het uitrekenen van kale opgaven.

6 Vereenvoudiging nomenclatuur
Het huidige leerplan voor mavo-lbo en onderbouw havo-vwo bevat geen voorschriften betreffende de nomenclatuur. De examens baseren zich op een uittreksel van het nomenclatuurrapport, dat inmiddels sterk verouderd is. Indertijd leefde de overtuiging dat relaties, verzamelingen en logische symbolen niet alleen een precieze formulering mogelijk maakten, maar ook aan het begrip bijdroegen. Nu is men algemeen van mening dat dat de logische- en verzamelingstheoretische symbolen eerder verduisterend dan verhelderend werken. Zeker op het mavo-lbo en in de onderbouw havo-vwo. De werkgroep gaat met docenten mavo-lbo en havo-vwo aan de slag om te zoeken naar een eenvoudiger en aansprekender taalgebruik. Het produkt van die werkzaamheden kan een voorstel zijn aan de nieuwe nomenclatuurcommissie tot vereenvoudiging van de nomenclatuur.

7 Heterogeen door de jaren heen.
Heterogeen is een term die men vooral gebruikt

voor een brugklas van een brede scholengemeenschap.
Door diverse oorzaken worden groepen in hogere leerjaren ook steeds heterogener. Je kunt daarbij denken aan een klas 3 lbo/mavo waar A, B, C en D-leerlingen in één klas gegroepeerd worden.
In deze werkgroep willen we stilstaan bij de heterogeniteit van groepen in verschillende fasen van het onderwijs.
Gesteund door ervaringen in het project Scholen in Ontwikkeling richten we ons in deze werkgroep op de volgende knelpunten:
- Welk differentiatie-model past het beste?
- Welke leerstof hoort daarbij?
- Hoe werk je daarmee in de klas?
- Hoe kom je met sectie van wandelgangenoverleg naar planmatig werken?

8 De computer als hulpmiddel binnen de wiskunde.
In de werkgroep komen de volgende onderwerpen aan de orde:
- gebruik en demonstratie van een gebruikers-vriendelijk funktie teken programma
- simulaties
- statistiek
- demonstratie van een aantal engelstalige wiskunde-programma's
- de huidige stand van zaken met betrekking tot de remedial reken- en wiskundeprogramma's.

Gezien de beperkte beschikbare tijd zullen de meeste programma's gedemonstreerd worden. In de pauzes kan men zelf achter de toetsen gaan zitten om de programma's uit te proberen.

Het Forum
Het onderwerp van het forum is: Wiskunde voor iedereen: wat moet iedere Nederlander tenminste aan wiskunde hebben gedaan? Aan de hand van een forumdiscussie over een aantal controversiële aspekten van het beleid rond de basiseducatie van wiskunde, kan de toehoorder zich een eigen mening vormen over de toekomst van wiskunde 12-16. Het forum bestaat uit een voorzitter, twee 'beleidsmakers', twee wiskunde-docenten. De beleidsmakers zullen vooral in een korte inleiding hun visie geven over de toekomstige ontwikkelingen van het vak wiskunde als onderdeel van de basiseducatie. In de forumdiscussie zullen deze visies geconfronteerd worden met de schoolpraktijk. Ook het publiek wordt in de gelegenheid gesteld vragen te stellen aan en te reageren op het forum.
Na afloop van het forum bestaat de mogelijkheid om in een werkgroep verder te discussiëren over dit onderwerp. Als uitkomst van deze discussie kunnen aanbevelingen worden gedaan over de gewenste ontwikkelingen van wiskunde 12-16.

De markt
Tijdens de pauze zal er een tentoonstelling zijn van schoolmethodes en ander leerling-materiaal. Ook zijn er demonstraties van computerprogramma's en kan men zelf programma's uitproberen.

1 Naar aanleiding van de voorgestelde statutenwijziging heeft de werkgroep didactiek van de wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Groningen het bestuur verzocht de tijdsduur voor de kandidaatstelling te verruimen.
Teneinde aan deze wens tegemoet te komen stelt het bestuur de volgende wijzigingen van de statuten en het huishoudelijk reglement voor.
Statuten artikel 8 lid 2:
'Tot veertien dagen voor' wijzigen in 'Tot achtentwintig dagen na het verschijnen van de eerste oproep voor'.
Statuten artikel 10 lid 1:
'Ten minste vier weken' wijzigen in 'Ten minste acht weken'.
Huishoudelijk reglement artikel 5:
'Binnen veertien dagen na de oproeping' wijzigen in 'Binnen achtentwintig dagen na de eerste oproeping'.
Tevens verzochten deze leden de eerste twee zinnen van artikel 8, lid 3 van de statuten te wijzigen in 'Bestuursleden worden gekozen voor een termijn van maximaal drie jaar. Een aftredend bestuurslid is herkiesbaar tenzij dit bestuurslid reeds gedurende tien jaar zitting heeft gehad in het bestuur.'
Het bestuur heeft er begrip voor dat leden vinden dat er een snellere doorstroming binnen het bestuur plaatsvindt. Het bestuur heeft besloten aan deze wens gehoor te gaan geven. Het vastleggen in de statuten van een periode van maximaal tien jaar kan in de praktijk echter wel eens tot grote problemen aanleiding geven. Het bestuur ontraadt de aanneming van dit voorstel.

Wiskunde op maat

U bepaalt als wiskundedocent de inhoud, aard en kwaliteit van uw wiskundelessen. Auteurs en uitgevers van wiskundemethoden kunnen u daarbij slechts behulpzaam zijn met goede schoolboeken.
Met de methoden van Wolters-Noordhoff kunt u wiskunde geven zoals ú dat wenst.

Moderne wiskunde abcd

Voor lbo en mavo

'Moderne wiskunde abcd' staat voor differentiatie, degelijkheid en doelmatigheid. In eenvoudige taal en met ruim voldoende oefenstof voor alle niveaus van lbo en mavo.

Passen en meten

Voor lbo, mavo en brede scholengemeenschappen

'Passen en meten' biedt oplossingen voor twee belangrijke problemen: de grote verschillen tussen de leerlingen en het gebrek aan motivatie bij veel leerlingen die het nut van de wiskunde (nog) niet inzien.

Sigma

Voor mavo, havo en vwo

Ook de nieuwe delen van 'Sigma' zijn flexibel bruikbaar en berekend op zelfwerkzaamheid. 'Sigma' rekent af met tijdproblemen, biedt degelijke en betrouwbare theorie en een ruime keus aan oefenstof.
Voor de bovenbouw van het vwo zijn er de nieuwe delen voor wiskunde A en B.

Moderne wiskunde

Voor mavo, havo en vwo

Voor de onderbouw is er 'Moderne wiskunde vierde editie': eigentijds in aanpak, vorm en inhoud. Bovendien zijn er gebruikersboeken vol ervaringen en tips van collega's. In het havo en vwo biedt de methode een adequate voorbereiding op de nieuwe delen van 'Moderne wiskunde bovenbouw'.

Wiskunde voor het middelbaar beroepsonderwijs

Voor het mbo

De diverse delen van deze series bieden precies die wiskunde, die er nodig is voor het technisch, het agrarisch, het laboratorium- en streekschoolonderwijs. De wiskundeleergang voor de mts (Pigmans) vormt al jaren een betrouwbaar baken voor het mto-examen.

Opgavenbundels

Voor het voortgezet onderwijs

Nieuw zijn de examenbundels 'Opgaven wiskunde A vwo' en 'B vwo'.
Een vervolmaking van deze serie die al jaren de extra oefenstof biedt die u nodig heeft voor lbo, mavo, havo of vwo.

Voor nadere informatie, catalogi, overige documentatie en beoordelingsexemplaren kunt u zich wenden tot Wolters-Noordhoff.



Wolters-Noordhoff bv
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 22 63 11

Wolters-Noordhoff

244

Inhoud

Bij het begin van de 62e jaargang 1

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Verslag van het verenigingsjaar 1985-1986 2

H. J. Spalburg: Een praktische meetkundeles voor de brugklas 4

M. Pranger, R. Sjamaar: Functies van twee variabelen 5

P. G. J. Vredenduin: Grensgevallen II 10

T. H. Chen: Een fout in het wiskunde A examen? 15

J. Kieft: De weekdag uit het hoofd berekend 17

E. M. Koerts, E. J. van Rossum, Leerconcepties en wiskunde B 25

Mededelingen 3

Recreatie 28

Boekbespreking 21

Examen Wiskunde A 1986, 2e periode 22

Jaarvergadering/Studiedag 1986 30

Adressen van auteurs

T. H. Chen, 4e Binnenvestgracht 44,
2311 NV Leiden

J. Kieft, Amaliagaarde 5,
1403 JG Bussum

M. Pranger, Park Arenberg 37
3731 EN De Bilt

E. J. van Rossum, Hogere Hotelschool,
Brusselse laan 2, 2587 AH Den Haag

R. Sjamaar, Justus van Effenstraat 22,
3511 HL Utrecht

H. J. Spalburg, Albert Cuypstraat 6,
7556 GD Hengelo

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148,
6865 HN Doorwerth